Logarithme Néperien -21-02-13-
Terminale S1, 2012-2013, Y. Angeli

1. Définition et propriétés algébriques

Définition 1. La fonction logarithme néperien[1], notée ln est la fonction réciproque de la fonction exponentielle sur $]0;+\infty[$. Le logarithme néperien est donc définie sur $]0;+\infty[$ et vérifie : $e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$.

Remarque 1. L'existence d'une fonction réciproque est une conséquence du théorème de la bijection : exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Ainsi, pour tout $y > 0$, il existe un unique réel noté $x = \ln(y)$ tel que $e^x = y$.

Théorème 1.

♥ Pour tous réels $x, y > 0$ et tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, on a :

① $e^{\ln(x)} = x$	② $\ln(e^a) = a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
③ $\ln(1) = 0$; $\ln(e) = 1$	④ $\ln(x\,y) = \ln(x) + \ln(y)$
⑤ $\ln\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\ln(y)$	⑥ $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
⑦ $\ln(x^n) = n\ln(x)$	⑧ $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$

⑨ ⚠ : ln est définie sur $]0;+\infty[$: $\ln(0)$, $\ln(-2)$ n'existent pas !

Preuve. Plusieurs résultats reposent sur : $e^a = e^b \iff a = b$ $(*)$.
① $e^{\ln(x)} = x$ d'après la définition 1. ② $e^{\ln(e^a)} = e^a$, d'après $(*)$, $\ln(e^a) = a$.
③ $\ln(1) = \ln(e^0) = 0$ et $\ln(e) = \ln(e^1) = 1$ d'après ②.
④ $e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\ln(x)}e^{\ln(y)} = xy = e^{\ln(xy)}$, d'après $(*)$: $\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$.
⑤ $0 \overset{③}{=\!=} \ln(1) = \ln(y/y) \overset{④}{=\!=} \ln(y) + \ln(1/y)$, donc $\ln(1/y) = -\ln(y)$.
⑥ $\ln(x/y) \overset{(2)}{=\!=} \ln(x) + \ln(1/y) \overset{⑤}{=\!=} \ln(x) - \ln(y)$.
⑦ $e^{\ln(x^n)} = x^n = (e^{\ln(x)})^n = e^{n\ln(x)}$ donc $\ln(x^n) = n\ln(x)$.
⑧ $2\ln(\sqrt{x}) = \ln(\sqrt{x}^2) = \ln(x)$, on obtient l'égalité en divisant par 2. □

Exemple 1. Résoudre $e^x - 2 = 0$ ....

Exemple 2. $\ln\left(\frac{1}{6}\right) + \ln(3e^2) - \ln\left(\frac{e}{2}\right) =$ ....

....

Remarque 2. si $a, b > 0$, $\ln(a) < \ln(b) \iff e^{\ln(a)} < e^{\ln(b)} \iff a < b$ (car exp strictement croissante). Donc ln est strictement croissante. On a donc également : $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$.

Exemple 3. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $0{,}99^n < 0{,}5$ ....

....

....

1. John Neper, (1550-1617) est un mathématicien écossai à l'origine des logarithmes, en 1614. Il a introduit ce concept afin de simplifier des calculs fastidieux appliqués à l'astronomie.

2. Étude de la fonction logarithme

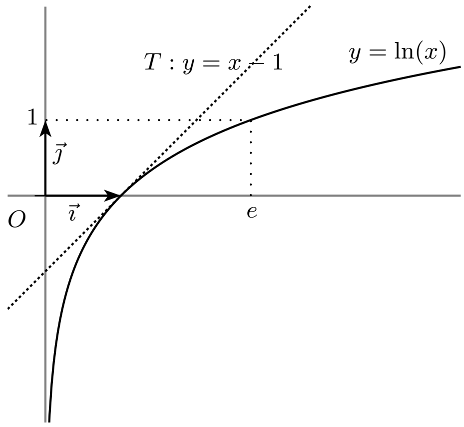
Théorème 2.

ln est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0 \text{ pour tout } x > 0$$

De plus : $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
ln	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$



Remarque 3. Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un interalle I, $\ln(u)$ existe et est dérivable sur I, de dérivée $\dfrac{u'}{u}$. (théorème de dérivation des fonctions composées)

Remarque 4. $\ln'(1) = 1$ et $\ln(1) = 0$ donc $y = x - 1$ est l'équation de la tangente à la courbe de ln en $x = 1$. Ainsi : $\ln(1+h) \approx h$ pour h voisin de 0.

Preuve. On admet la dérivabilité (et donc la continuité) de ln sur $]0;+\infty[$.
♥ On considère f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = e^{\ln(x)}$ (dérivable par composition) de dérivée vérifiant d'une part $f'(x) = \ln'(x) \times e^{\ln(x)} = x\ln'(x)$ et d'autre part $f'(x) = 1$ car $f(x) = x$. Ainsi, pour $x > 0$, $x\ln'(x) = 1$ d'où $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$. □

Exemple 4. Tableau de signe de $\ln(x)$?

Dériver $g : x \mapsto \ln(x + x^2)$ ....

....

Théorème 3.

♥ On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

① $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ ② $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)^n}{x} = 0$ (croissances comparées)

③ $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ ④ $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)^n = 0$ (croissances comparées)

⑤ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$ (taux d'accroissement en 1)

Preuve. ① $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} \overset{x=e^X}{=\!=} \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(e^X)}{e^X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$ par croissance comparée de la fonction exponentielle. La même idée permet d'obtenir ② ③ et ④.

⑤ : on exprime la dérivabilité en 1 : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$

Définition 2. Si $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $a^b = e^{b\ln(a)}$ (exponentielle de base a).
Le logarithme de base a est $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$ pour $x > 0$. On note $\log = \log_{10}$.

Exemple 5. Étudier $h :]0;+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^x$.