Partie A

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unités graphiques. 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right) \mathrm{e}^{-x}.$$

On désigne par (Γ) la courbe représentative de f dans le plan muni de $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. En écrivant $f(x)$ sous la forme $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}$, déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe (Γ) ?

2. a. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et montrer que pour tout réel x : $f'(x) = \left(-x^2 + 4x - 3\right) \mathrm{e}^{-x}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

c. Dresser le tableau de variations de f. On donnera la valeur exacte des extremums.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (Γ) en son point A d'abscisse 0.

4. Tracer la courbe (Γ) et la tangente (T).

Partie B

On s'intéresse dans cette partie à l'équation $f(x) = \frac{1}{8}$.

1. En utilisant le tableau de variations de la fonction f, justifier que cette équation admet trois solutions dans $\mathbb{R}$ et que l'une des solutions notée α appartient à l'intervalle $[1 ; 3]$.

2. à l'aide d'une calculatrice, donner un encadrement d'amplitude $0,1$ de la solution α.

Partie C

Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$.

1. Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.