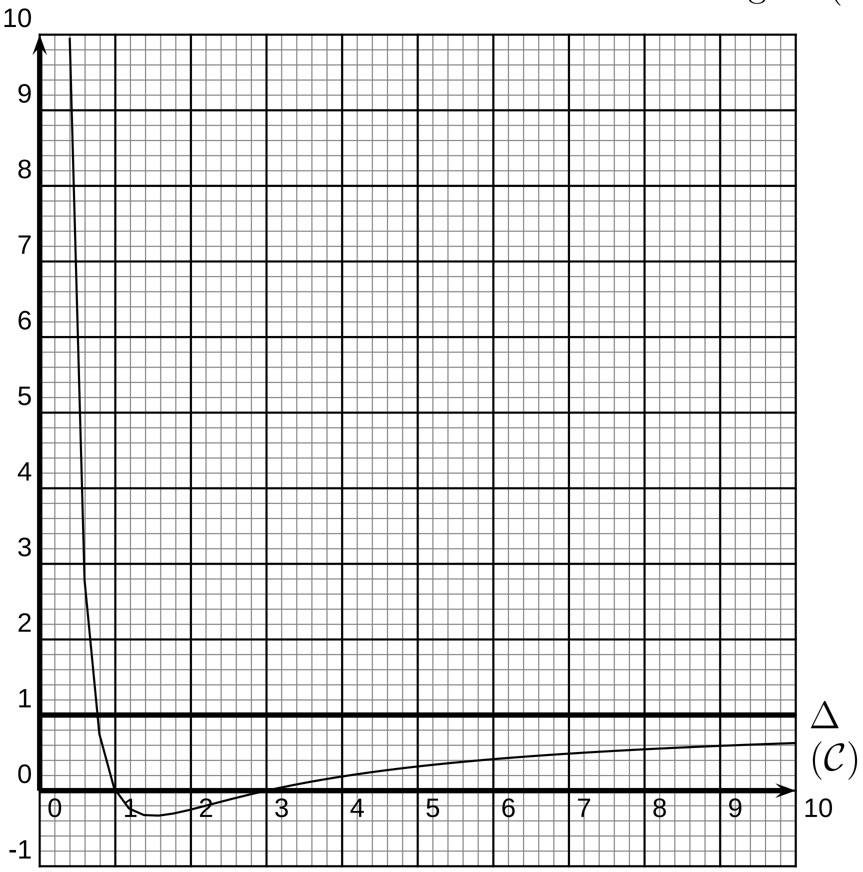
Feuille d'exercices 8 -19.02-10-
Problème du bac STI Électrotechnique 2000, métropole
Terminale ET, Lycée Newton, Y. Angeli

Les trois parties du problème peuvent être traitées séparément.

Partie A : Exploitation d'un graphique

On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$, dont la représentation graphique $(\mathcal{C})$ obtenue sur l'écran d'une calculatrice est donnée sur la figure (1) ci-dessous.



On précise que la courbe $(\mathcal{C})$ ne coupe l'axe des abscisses qu'en deux points et qu'elle admet l'axe des ordonnées et la droite (Δ) qui est parallèle à l'axe des abscisses comme asymptotes :

I. À partir de cette représentation graphique :

1. déterminer :

a. la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0 ;

b. la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

2. dresser un tableau donnant le signe de $g(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

II On admet que : $g(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2}$ où $a,\ b$ et c sont trois nombres réels.

1. En calculant la limite de $\dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2}$ lorsque x tend vers l'infini, montrer que $a = 1$.

2. Lire $g(1)$ et $g(3)$ sur le graphique et en déduire un système de deux équations permettant d'obtenir b et c.

3. Résoudre ce système et exprimer $g(x)$ en remplaçant $a,\ b$ et c par leurs valeurs.

Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = -\frac{3}{x} - 4\ln x + x.$$

1. a. En mettant x en facteur dans l'expression de $f(x)$, montrer que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$.

b. En mettant $\dfrac{1}{x}$ en facteur dans l'expression de $f(x)$, montrer que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est égale à $-\infty$. (On rappelle que $\lim\limits_{x \to 0}(x \ln x) = 0$.)

2. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = g(x)$.

b. Utiliser les résultats de la **partie A** pour en déduire le tableau de variation de f.

c. Calculer les valeurs exactes de $f(1)$ et $f(3)$.

II En utilisant le tableau de variations de f, justifier que l'équation $f(x) = 0$

1. a. n'admet pas de solution dans l'intervalle $]0\ ;\ 3[$,

b. admet une solution unique, notée x_0 dans l'intervalle $[3\ ;\ 10]$,

c. n'admet pas de solution dans l'intervalle $]10\ ;\ +\infty[$.

2. Compléter le tableau (document à rendre avec votre copie) et en déduire un encadrement d'amplitude 10^{-2} de x_0.

Partie C : Calcul d'aires

1. Montrer que $f(\sqrt{3}) = -2\ln 3$ (détailler les calculs sur votre copie).

2. Le tracé de la courbe $(\mathcal{C})$ représentant g dans un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ est donné sur la figure (2). (Document à rendre avec votre copie).

a. Soit D le domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe $(\mathcal{C})$ d'une part et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = 3$ d'autre part.

Calculer la valeur exacte de son aire A exprimée en unités d'aires. (On rappelle que $g = f'$).

b. Tracer la droite (L) d'équation $x = \sqrt{3}$ et montrer qu'elle partage le domaine D en deux domaines d'aires égales.

Tableau à compléter (partie B 2)

x	$9,15$	$9,16$	$9,17$	$9,18$	$9,19$	$9,20$	$9,21$	$9,22$	$9,23$	$9,24$	$9,25$
$f(x)$											

Figure 2