Feuille d'exercice V - 05.02.10 -
BAC STI Nouvelle Calédonie 2008
Terminale ET, Lycée Newton, Y. Angeli

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 1 - \ln x + 2x^2$.

1. Montrer que $g'(x) = \dfrac{(2x+1)(2x-1)}{x}$.
2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
   Calculer $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
   Dresser le tableau de variation de la fonction g (sans les limites).
3. En déduire que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $g(x)$ est strictement positif.

Partie II : Étude de la fonction *f*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} + 2x - 3$.

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Étudier la limite de f en 0. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.
2. Étudier la limite de f en $+\infty$ et démontrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
3. Montrer que pour tout nombre réel x strictement positif, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. Soit A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse e et B le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $\sqrt{\mathrm{e}}$.
   (a) Donner les valeurs arrondies à 10^{-2} des coordonnées des points A et B.
   (b) En déduire que la fonction f est positive sur l'intervalle $[\sqrt{\mathrm{e}}\ ;\ \mathrm{e}]$.
6. Tracer la droite Δ et la courbe $\mathcal{C}$. Placer les points A et B.
7. (a) Démontrer qu'au point A, la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à la droite Δ.
   (b) Le point A est-il le seul point de la courbe $\mathcal{C}$ admettant une tangente parallèle à la droite Δ ?