BAC STI Réunion 2006

I. On considère l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_0) \quad : \quad y'' + 4y = 0$$

où y désigne une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et y'' sa dérivée seconde.

1. Résoudre l'équation (E_0).
2. Déterminer la solution particulière f de (E_0) vérifiant :
$$f(0) = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad f'(0) = 2$$
où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
3. Montrer que pour tout réel t, $f(t)$ peut s'écrire sous la forme :
$$f(t) = 2\cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right).$$
4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

II. On considère maintenant l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_1) \quad : \quad y'' + 4y = 3\sin t$$

où y désigne une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$, et y'' sa dérivée seconde.

1. Montrer que si une fonction g est solution de l'équation (E_0), alors la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(t) = g(t) + \sin t$ est solution de l'équation (E_1).
2. Donner une solution particulière, ne s'annulant pas pour $t = 0$, de l'équation (E_1).