Feuille d'exercices 15 -11-06-10-
Problème bac STI Électro Polynésie, juin 2006
Terminale ET, Lycée Newton, Y. Angeli

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité : 2 cm).

Soit une fonction f définie sur un intervalle I. On a déterminé expérimentalement des valeurs de f qui ont permis d'obtenir une partie de la courbe $(\mathcal{C})$, représentative de la fonction f, et sa tangente (T) au point O (voir feuille annexe).

Partie A

1. À l'aide du graphique, déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.

2. On admet que l'expression de $f(x)$ est de la forme $f(x) = ax+b-\ln(10x+1)$ où a et b sont des réels.

a. Déterminer $f'(x)$ en fonction de a.

b. En utilisant les résultats du 1., déterminer les réels a et b.

Partie B

On admet désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle $I =]-0,1;10]$ par

$$f(x) = 0,5x - \ln(10x+1).$$

1. Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to -0,1 \\ x > -0,1}} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C})$ représentant f ?

2. Calculer la fonction f' dérivée de la fonction f. Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $5x - 9,5$ sur l'intervalle I.

Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle I.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ a dans l'intervalle $[6 ; 10]$ une solution unique, que l'on notera α.

Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

5. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]-0,1 ; 10]$ par :

$$F(x) = 0,25x^2 + x - (x+0,1)\ln(10x+1)$$

a. Démontrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

b. Calculer l'intégrale $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. On donnera la valeur exacte.

c. On considère dans le repère défini initialement, l'ensemble des points M de coordonnées $(x~;~y)$ tels que : $\left\{\begin{array}{lllll} 0 & \leqslant & x & \leqslant & 1 \\ f(x) & \leqslant & y & \leqslant & 0 \end{array}\right.$

Utiliser la question précédente pour déterminer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 de cette région. On en donnera la valeur décimale arrondie à 10^{-2} près.

Annexe (problème)