FEUILLE D'EXERCICES 14 -09-06-10-
Terminale ET, Lycée Newton, Y. Angeli

EXERCICE 1 (métropole et Réunion sept. 2009 - 6pts)
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation

$$z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0.$$

2. Soit z_0 le nombre complexe de module 2 et dont un argument est $\frac{\pi}{6}$.
Calculer le module et un argument du nombre complexe z_0^3.
En déduire la forme algébrique de z_0^3.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_\text{A} = 8\text{i}, \ z_\text{B} = 4\sqrt{3} + 4\text{i} \text{ et } z_\text{C} = \overline{z_\text{B}}$$

où $\overline{z_\text{B}}$ désigne le nombre complexe conjugué de z_B.

1. Calculer le module et déterminer un argument de z_B puis de z_C

2. Vérifier que $z_\text{A} = 8\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$.

3. On appelle z_D l'affixe du point D, image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a. Déterminer z_D et l'écrire sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$, où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.

b. En déduire que $z_\text{D} = -4\sqrt{3} + 4\text{i}$.

4. **a.** Placer les points A, B, C et D dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ en prenant comme unité graphique 1 cm.

b. Démontrer que le triangle OAD est équilatéral.

c. Démontrer que le point O est le milieu du segment [CD].

d. Déterminer la nature du triangle ACD.

EXERCICE 2 (métropole juin 2008 - 5pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 + 6z\sqrt{3} + 36 = 0.$$

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_{\text{A}} = -3\sqrt{3} + 3\text{i}$ $\quad$ $z_{\text{B}} = -3\sqrt{3} - 3\text{i}$ $\quad$ et $z_{\text{C}} = -6\sqrt{3}$.

a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_{A} et z_{B}.

b. Écrire le nombre complexe z_{A} sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.

c. Placer les points A, B, C dans le plan muni du repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

3. a. Déterminer la nature du triangle ABC.

b. En déduire que le quadrilatère OACB est un losange.

4. On appelle K le point du plan complexe d'ordonnée négative tel que le triangle OAK soit rectangle et isocèle en O.

On note z_{K} l'affixe du point K.

a. Construire le point K sur la figure.

b. Par quelle rotation de centre O, le point K est-il l'image du point A ?

c. Écrire alors z_{K}, sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ (où r est un nombre réel strictement positif et θ un réel compris entre $-\pi$ et π) puis sous forme algébrique.