

### Partie A: Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad y' + 5y = 5x^3 + 3x^2 + 5,$$

où  $y$  représente une fonction de la variable  $x$ , définie et dérivable sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle  $(E_0) \quad : \quad y' + 5y = 0$ .
2. Déterminer deux nombres réels  $a$  et  $b$  tels que la fonction  $u$ , définie sur  $\mathbb{R}$  par  $u(x) = ax^3 + b$ , soit solution de l'équation différentielle  $(E)$ .
3. Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = ke^{-5x} + x^3 + 1$  où  $k$  est un nombre réel.
  - a. Vérifier que  $h$  est solution de l'équation  $(E)$ .
  - b. Déterminer le réel  $k$  tel  $h(0) = -2$ .

### Partie B : Étude de la fonction $f$

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = -3e^{-5x} + x^3 + 1.$$

1.
  - a. Déterminer la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ .
  - b. Déterminer la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .
2.
  - a. On désigne par  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$ .  
Calculer  $f'(x)$  pour tout réel  $x$ .
  - b. En déduire le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et dresser son tableau de variations.
3.
  - a. Calculer  $f(0)$  et  $f(1)$ .
  - b. Établir que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $[0 ; 1]$ .
  - c. Donner un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  du nombre réel  $\alpha$ .
  - d. Déterminer selon les valeurs du réel  $x$ , le signe de  $f(x)$ .

### Partie C : Courbe représentative de la fonction $f$

Le plan est muni d'un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'unités graphiques 8 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Soit  $u$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $u(x) = x^3 + 1$ .

La représentation graphique  $\Gamma$  de la fonction  $u$ , dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est tracée sur la feuille jointe en annexe.

a. On pose, pour tout réel  $x$ ,  $d(x) = f(x) - u(x)$ .

Étudier le signe de  $d(x)$ .

b. En déduire la position de la courbe  $\mathcal{C}$  par rapport à la courbe  $\Gamma$ .

2. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous. On donnera dans chaque cas la valeur décimale arrondie au centième de  $f(x)$ .

$x$	-0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2
$f(x)$								

3. Tracer la courbe  $\mathcal{C}$  dans le repère figurant sur la feuille annexe à remettre avec la copie.

### Partie D : Calcul d'une aire

On appelle  $\mathcal{P}$  la partie du plan limitée par la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = \frac{1}{2}$  et  $x = 1$ .

1. Hachurer sur la feuille annexe la partie  $\mathcal{P}$  du plan.

2. Calculer la mesure, en unités d'aire, de l'aire  $\mathcal{A}$  de la partie  $\mathcal{P}$  du plan.

Dans cette question particulièrement, toute trace de recherche, même incomplète, figurant sur la copie sera prise en compte dans l'évaluation.

FEUILLE ANNEXE DU PROBLÈME  
À REMETTRE AVEC LA COPIE

