
DEVOIR MAISON 1 POUR LE 09.10.09
Terminale ET, Lycée Newton, Y. Angeli

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 2cm. Le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ est noté i .

Soit $z = x + iy \neq -2$. On définit $Z = \frac{z - 2i}{z + 2}$.

1. Dans cette question, $z = -2 + 4i$.
 - (a) Calculer Z , le mettre sous forme algébrique.
 - (b) Donner la forme exponentielle de Z .
 - (c) Que vaut alors Z^{1000} ?
2. Résoudre l'équation d'inconnue $z : \frac{z - 2i}{z + 2} = i$. (on mettra le résultat sous forme algébrique).
3. On note $X = \operatorname{Re}(Z)$ la partie réelle de Z .
 - (a) Exprimer X en fonction de x et y .
 - (b) Démontrer que $X = \frac{(x + 1)^2 + (y - 1)^2 - 2}{(x + 2)^2 + y^2}$.
 - (c) Soit I le point d'affixe $-1 + i$ et M le point d'affixe z . Quelle est l'interprétation géométrique de $|z + 1 - i|$?
 - (d) Exprimer $|z + 1 - i|$ en fonction de x et y . En déduire que M appartient au cercle de centre I et de rayon $\sqrt{2}$ si et seulement si
$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$$
 - (e) En déduire l'ensemble \mathcal{C} des points M tels que Z est imaginaire pur.
4. On note $Y = \operatorname{Im}(Z)$ la partie imaginaire de Z .
 - (a) Exprimer Y en fonction de x et de y .
 - (b) En déduire l'ensemble \mathcal{D} des points M tels que Z est réel.
5. Représenter \mathcal{C} et \mathcal{D} .