Bac Blanc 2010 (12.03.10)
Terminales STI, Lycée Newton

Exercice 1 (Nouvelle Calédonie - Novembre 2009) 5 points

1. Résoudre l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 4y = 0.$$

où y est une fonction de la variable x, deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie : $f(0) = \dfrac{1}{4}$ et $f'(0) = 0$.

3. Montrer que la fonction g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $g(x) = 3\sin x$ est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

4. Pour tout nombre réel x, on définit la fonction h par :

$$h(x) = 3\sin x + \frac{1}{4}\cos 2x.$$

Calculer $h'(x)$ pour tout nombre réel x.

5. Questionnaire à choix multiples :

pour chaque question, il y a une seule réponse exacte; recopier la réponse exacte sur la copie. Chaque réponse exacte rapporte 0,5 *point. Aucune justification n'est demandée.*

a. Quelle est la valeur de $h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$?

$\triangleright$ 3 $\triangleright$ $-\dfrac{1}{4}$ $\triangleright$ $\dfrac{11}{4}$

b. Quel est l'équation de la tangente à la courbe représentative de h au point d'abscisse 0 ?

$\triangleright$ $y = 3x + 0,5$ $\triangleright$ $y = 0,5x + 3$ $\triangleright$ $y = 3x + 0,25$

c. Combien l'équation $h(x) = 0$ admet-elle de solutions dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$?

$\triangleright$ 0 $\triangleright$ 1 $\triangleright$ 2

PROBLÈME (POLYNÉSIE - JUIN 2007) 11 points

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 3x - 4 + 4\ln x$.

1. Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$.

2. Soit g' la dérivée de g. Montrer que $g'(x) = \dfrac{2x^2 + 3x + 4}{x}$.

3. Dresser le tableau de variations de g sur $]0\ ;\ +\infty[$.

4. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x + 3\ln(x) - \dfrac{4\ln(x)}{x}$.
On note $(\mathcal{C})$ la courbe de f dans un repère orthonormal d'unité 3 cm.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de f en 0; on remarquera que $f(x) = x + \left(3 - \dfrac{4}{x}\right)\ln x$.

Que peut-on en déduire ?

2. **a.** Montrer que pour tout x strictement positif $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b. En utilisant les résultats de la partie A, étudier les variations de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

c. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

3. On rappelle que pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $f(x) = x + \left(3 - \dfrac{4}{x}\right)\ln x$.

Donner les solutions dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation $f(x) = x$.

4. Tracer $(\mathcal{C})$ et la droite d'équation $y = x$.

5. Interpréter graphiquement le résultat de la question 3.

Partie C

1. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + 3x\ln x - 2(\ln x)^2$ sur $]0; +\infty[$ est une primitive de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

2. On considère dans le plan le domaine $(\mathcal{D})$ délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

a. Hachurer le domaine $(\mathcal{D})$.

b. Calculer l'aire du domaine $(\mathcal{D})$ en unités d'aires puis en cm^2. On donnera la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie au mm^2 près.

EXERCICE 2 (NOUVELLE CALÉDONIE 2008) 4 points

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère le polynôme P de la variable complexe z défini de la façon suivante :

$$P(z) = 9z^3 - 21z^2 + 17z - 5.$$

1. Calculer $P(1)$.

2. Déterminer les réels a, b et c tels que $P(z) = (z-1)\left(az^2 + bz + c\right)$.

3. Résoudre dans l'ensemble des complexes l'équation : $P(z) = 0$.

4. On munit le plan d'un repère direct orthonormal $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 6 cm.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 1,\ z_{\mathrm{B}} = \frac{1}{3}(2+\mathrm{i}) \text{ et } z_{\mathrm{C}} = \frac{1}{3}(2-\mathrm{i}).$$

a. Représenter les points A, B et C .

b. Calculer les modules suivants : $|z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}|$, $|z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{C}}|$ et $|z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{C}}|$; en déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.

5. Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC.

a. Déterminer l'affixe du centre Ω de $\mathcal{C}$ et son rayon r en cm.

b. Placer Ω et tracer le cercle $\mathcal{C}$ sur la figure.