DEVOIR 5 - 15.12.09 -
Terminale ET, Lycée Newton, Y. Angeli

PARTIE A.
On considère l'équation différentielle (E_0) : $y'' + 4y = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0).
2. Trouver la solution f de (E_0) qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2\sqrt{3}$.
3. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.
5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(x) = 0$.
6. Déduire des deux questions précédentes les solutions sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = 0$.
7. Donner l'ensemble des solutions de $f(x) = 0$ de l'intervalle $]-\pi;\pi[$

PARTIE B.
On considère l'équation différentielle (E) $y'' + 4y = 8x + 4$

1. Montrer que la fonction $x \mapsto 2x + 1$ est une solution de l'équation (E)
2. Soit g une solution de l'équation (E_0) de la partie A. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x+1+g(x)$ est une solution de l'équation (E). On admet que toutes les solutions de (E) sont de cette forme.
3. Parmi les solutions précédentes, laquelle vérifie $h(0) = 2$ et $h'(0) = 2$?
4. Soit $H(x) = 2x + 1 + \cos(2x)$. Calculer la dérivée H' de H.
5. Étudier le signe de H' et dresser le tableau de variation de H.
6. Résoudre $\sin(2x) = 1$ sur $\mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de x la tangente à la courbe de H au point d'abscisse x est-elle horizontale ?
7. (Bonus) Démontrer que pour tout x, $H(x) \geq 2x$. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x$? En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x)$. Montrer de même que $H(x) \leq 2x + 2$ et en déduire la limite de H en $-\infty$.