Devoir 3 - 09.10.09 -
Terminale ET, Lycée Newton, Y. Angeli

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Soit A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
   (a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_{A}.
   (b) Écrire le nombre complexe z_{A} sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.
   (c) Placer le point A dans le repère $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$ en prenant comme unité graphique 2 cm.
2. Soit B l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. On appelle z_{B} l'affixe du point B.
   (a) Déterminer l'écriture du nombre complexe z_{B} sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ (où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π).
   (b) Écrire le nombre complexe z_{B} sous forme algébrique.
   (c) Placer le point B dans le repère $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$.
3. Montrer que le triangle AOB est équilatéral.
4. Soit C le point d'affixe $z_{\mathrm{C}} = z_{\mathrm{A}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
   (a) Par quelle transformation géométrique le point C est-il l'image du point A ? Préciser les éléments caractéristiques de cette transformation.
   (b) Placer le point C dans le repère $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$.
   (c) Écrire le nombre complexe z_{C} sous forme trigonométrique.
   (d) Établir que $z_{\mathrm{C}} = z_{\mathrm{A}}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
   En déduire l'écriture du nombre complexe z_{C} sous forme algébrique.
   (e) Déduiree des resultats précédents les valeurs exactes cos $\dfrac{7\pi}{12}$ et de sin $\dfrac{7\pi}{12}$.

Exercice 2

1. le nombre i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
   On considère $P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$ où z est un nombre complexe.
   (a) Calculer $P(2)$.
   (b) Déterminer les nombres réels $a,\ b$ et c tels que $P(z) = (z-2)\left(az^2 + bz + c\right)$.
   (c) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$ d'unité 5 cm.
   (a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 2,\ z_{\mathrm{B}} = 1+\mathrm{i},\ z_{\mathrm{C}} = 1 - \mathrm{i}$.
   (b) Déterminer le module et un argument de $z_{\mathrm{A}},\ z_{\mathrm{B}}$ et z_{C}.
   (c) Montrer que C est l'image de B par une rotation de centre O dont on précisera l'angle.
   (d) Déterminer les affixes des points I et J, milieux respectifs des segments [OA] et [BC].
   (e) Quelle est la nature du quadrilatère OBAC ? Justifier la réponse.