

---

DEVOIR 2 - 09.10.09 -  
Terminale ET, Lycée Newton, Y. Angeli

---

Pour  $z = x + iy \in \mathbb{C} - \{2i\}$ , on pose  $f(z) = \frac{z}{z - 2i}$ .

Dans le plan complexe, on note  $M$  le point d'affixe  $z$ ,  $A$  le point d'affixe  $z_A = 2i$  et  $J$  le point d'affixe  $z_J = i$ .

1. *Cours* : Exprimer la distance  $CD$  en fonction des affixes  $z_C$  et  $z_D$  des points  $C$  et  $D$  du plan.
2. Calculer  $f(1 + 2i)$ . En déduire  $f(f(f(f(f(f(1 + 2i))))))$ .
3. Résoudre l'équation  $f(z) = -i$ .
4. Soit  $z_S = -1 + i$ . Mettre  $z_S$  sous forme exponentielle. Calculer  $z_S^{200}$ .
5. Placer  $A, J$  et  $S$  d'affixe  $z_S$  dans un repère orthonormé d'unité 3 cm.
6. Démontrer que  $f(z) = \frac{x^2 + (y - 1)^2 - 1}{x^2 + (y - 2)^2} + i \frac{2x}{x^2 + (y - 2)^2}$ .
7. Exprimer  $|z - 2i|^2$  en fonction de  $x$  et de  $y$ .
8. En déduire que  $AM \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 \neq 0$ .
9. Exprimer  $|z - i|^2$  en fonction de  $x$  et de  $y$ .
10. En déduire que  $JM^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 - 1 = 0$ .
11. Déterminer l'ensemble  $\mathcal{C}$  des points  $M$  tels que  $f(z)$  soit imaginaire pur.
12. Déterminer l'ensemble  $\mathcal{D}$  des points  $M$  du plan tels que  $f(z)$  soit réel.
13. Représenter  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  dans le repère.