

### Partie A : Introduction d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = e^x + x - 1$ .

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
2. Étudier le sens de variation de  $g$  puis dresser son tableau de variations.
3. (a) Vérifier que  $g(0) = 0$ .  
(b) En déduire le signe de  $g(x)$  pour  $x$  appartenant à  $\mathbb{R}$ .

### Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x - 3 - xe^{-x}$ . On appelle  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm.

1. Vérifier que, pour tout  $x \neq 0$ ,  $f(x) = x \left( 1 - \frac{3}{x} - e^{-x} \right)$ , déduire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
2. (a) Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .  
(b) Montrer que  $\mathcal{C}$  admet pour asymptote la droite D d'équation :  $y = x - 3$ .  
(c) Étudier la position de la courbe  $\mathcal{C}$  par rapport à la droite D.
3. On désigne par  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$ .  
(a) Calculer  $f'(x)$  pour tout réel  $x$ , puis vérifier que :  $f'(x) = g(x)e^{-x}$ .  
(b) En utilisant les résultats de la **partie A**, déterminer le signe de  $f'(x)$ .  
(c) Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .
4. (a) Donner une valeur décimale approchée à  $10^{-2}$  près de  $f(3)$  et de  $f(4)$ .  
(b) Prouver qu'il existe un nombre  $\alpha \in ]3; 4[$  tel que :  $f(\alpha) = 0$ .  
(c) Donner une valeur approchée de  $\alpha$  au centième près.
5. Tracer la courbe  $\mathcal{C}$  et la droite D dans le plan muni du repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

### Partie C : Calcul d'aire

Soit la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = -(x + 1)e^{-x}$ .

1. On note  $h'$  la fonction dérivée de la fonction  $h$ . Calculer  $h'(x)$  pour  $x$  appartenant à  $\mathbb{R}$ .
2. On appelle  $\mathcal{A}$  la valeur, exprimée en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe  $\mathcal{C}$ , la droite D, l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = 2$ . Donner la valeur exacte de  $\mathcal{A}$  puis une valeur décimale approchée par excès à  $10^{-2}$  près.