
DEVOIR 1 - 25.09.09 -
Terminale ET, Lycée Newton, Y. Angeli

Le problème qui suit est inspiré d'un exercice posé au bac, section STI, en 1998. Toutes les constructions géométriques se feront dans un seul et même repère, sans utiliser de valeurs approchées. Les traits de constructions doivent être apparents.

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique $2cm$.

1. Soit $z_A = -1 - i\sqrt{3}$. et $z_B = \overline{z_A}$.
 - a. Calculer le module et un argument de z_A .
 - b. Déduire de **1.a** le module et un argument de z_B .
 - c. Construire le point A d'affixe z_A .
 - d. Placer le point B symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées. Quelle est l'affixe de B ?
 - e. Déterminer les longueurs OA , OB et AB . Quelle est la nature du triangle OAB ?

2. Soit $z_C = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.
 - a. Donner le module et un argument de z_C .
 - b. Montrer que la forme algébrique de z_C est $z_C = 1 + i$.
 - c. Construire le point C d'affixe z_C .

3. Soit $z_D = \frac{z_B}{z_C}$.
 - a. Mettre z_D sous forme algébrique.
 - b. Déduire des questions **1.b** et **2.a** le module et un argument de z_D .
 - c. Mettre z_D sous forme trigonométrique.
 - d. Déduire des questions **3.a.** et **3.c.** que

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \cos x + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \sin x.$$

- a. Démontrer que l'on peut écrire, pour tout réel x :

$$f(x) = \cos \left(\frac{5\pi}{12} - x \right).$$

- b. Résoudre $f(x) = 0$ sur \mathbb{R} .