

## 1. NOTION DE PRIMITIVE

**Définition 1.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . Une primitive de  $f$  sur  $I$  est une fonction  $F$  définie et dérivable sur  $I$  et qui vérifie :  $F' = f$  sur  $I$ .

**Exemple 1.** Une primitive de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x$  est la fonction  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ . On a en effet pour  $x \in \mathbb{R}, F'(x) = 2x = f(x)$ , c'est-à-dire :  $F' = f$ .

$\triangle$  une fonction admettant une primitive en admet une infinité. Dans l'exemple précédent, la fonction  $x \mapsto x^2 + 1$  est également une primitive de la fonction  $x \mapsto 2x$ .

**Exemple 2.** Déterminer une primitive  $F$  de  $f : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$  : .....

**Exemple 3.** si  $u$  dérivable sur  $I$ , une primitive sur  $I$  de  $u'e^u$  est .....

**Méthode 1.** D'après la définition 1, pour vérifier qu'une fonction  $F$  donnée est une primitive d'une fonction  $f$  donnée, il suffit de dériver  $F$  et de vérifier que l'on retrouve  $f$ .

**Exemple 4.** Montrer que  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1 - e^{-x^2}}{2}$  est une primitive de  $f : x \mapsto xe^{-x^2}$ ....  
.....  
.....

Propriété 1.

*Linéarité.* Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions admettant respectivement  $F$  et  $G$  comme primitives sur l'intervalle  $I$ , et si  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , alors  $\alpha F + \beta G$  est une primitive de  $\alpha f + \beta g$  sur  $I$ .

**Preuve.** En conséquence de la linéarité des dérivées :  $(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g$ .

**Exemple 5.** Déterminer une primitive  $F$  sur  $\mathbb{R}$  de  $f : x \mapsto 2x - 7$ .....  
.....

**Méthode 2.** Si une fonction  $f$  est égale à un facteur près à une dérivée  $g'$ , une primitive  $F$  de  $f$  est de la forme  $F = k g$ .

**Exemple 6.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ . Comme  $(x^2)' = 2x$ , on cherche une primitive de la forme  $F(x) = kx^2$ . Donc  $F'(x) = k \times 2x = f(x)$  pour  $k = \frac{1}{2}$ . Ainsi,  $F : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$  convient.

Propriété 2.

Soit  $n \neq -1$ . Une primitive de  $f : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$  est  $F : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ .

**Preuve.** ....  
.....

**Exemple 7.** En déduire une primitive de  $x \mapsto x^3 - 3x + 5$ .....  
.....

## 2. ENSEMBLE DES PRIMITIVES D'UNE FONCTION

### Propriété 3.

Si  $f$  admet  $F$  comme primitive sur l'intervalle  $I$ , alors les primitives de  $f$  sur  $I$  sont les fonctions  $G$  de la forme  $G : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto F(x) + k$  où  $k \in \mathbb{R}$ .

**Preuve.** Soit  $G$  une primitive de  $f$  sur  $I$ . Alors, la fonction  $H$  définie sur  $I$  par  $H(x) = G(x) - F(x)$  est dérivable et pour  $x \in I, H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ .

Donc  $H$  est une constante réelle  $k : G(x) - F(x) = k$ . D'où  $G(x) = F(x) + k$ .

Réciproquement, si  $k \in \mathbb{R}$  la fonction définie sur  $I$  par  $G(x) = F(x) + k$  a pour dérivée  $G'(x) = F'(x) = f(x)$  sur  $I$ , donc est une primitive de  $f$ .

### Propriété 4.

Soit  $f$  admettant  $F$  comme primitive sur l'intervalle  $I, x_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Alors il existe une unique primitive  $G$  de  $f$  sur  $I$  telle que  $G(x_0) = y_0$ .

**Preuve.** Les primitives de  $f$  sont de la forme  $G(x) = F(x) + k$ . Donc  $G(x_0) = F(x_0) + k = y_0$  si et seulement si  $k = y_0 - F(x_0)$ . D'où  $f$  a pour unique primitive satisfaisant  $G(x_0) = y_0$  la fonction définie par  $G(x) = F(x) - F(x_0) + y_0$ .

**Exemple 8.** Donner l'ensemble des primitives de  $x \mapsto \frac{1}{x^2} + x^2$  .....

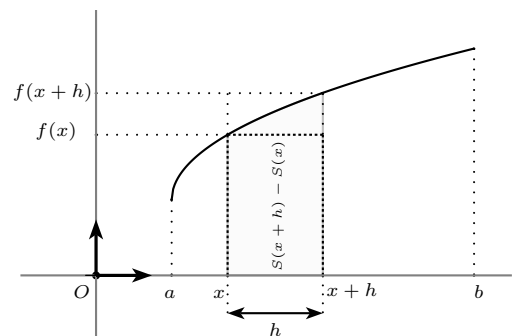
**Exemple 9.** Donner la primitive de  $x \mapsto 1 + x^2$  qui s'annule en  $x = 2$  .....

## 3. AIRE SOUS UNE COURBE

### Théorème 5.

Soit  $f$  une fonction continue et positive sur un intervalle  $[a, b]$ . Soit  $\mathcal{C}$  sa courbe dans le plan muni d'un repère orthogonal. Pour tout  $x \in [a, b]$ , on note  $S(x)$  l'aire en unités d'aire de la surface située entre la courbe  $\mathcal{C}$  et l'axe des abscisses, et entre les abscisses  $a$  et  $x$ .

On a alors :  $S$  dérivable sur  $[a, b]$ , et  $S' = f$ .



**Preuve.** Pour simplifier, on suppose en plus  $f$  croissante sur  $[a, b]$ . Soit  $h > 0$ . On encadre l'aire  $S(x+h) - S(x)$  par l'aire de deux rectangles de base  $h$  et de hauteurs respectives  $f(x)$  et  $f(x+h)$ . Ainsi,  $hf(x) \leq S(x+h) - S(x) \leq hf(x+h)$  d'où :  $f(x) \leq \frac{S(x+h) - S(x)}{h} \leq f(x+h)$ . En raisonnant de même pour  $h$  négatif, on obtient une inégalité en sens inverse.

Or  $f$  est continue :  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$ . D'où :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = S'(x) = f(x)$ .

**Corollaire 6.** Une fonction  $f$  continue sur un intervalle  $I$  admet une primitive sur  $I$ .

**Exemple 10.** La fonction  $]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue; elle admet donc une unique primitive qui vaut 0 en  $x = 1$ . Cette fonction, notée  $\ln$  est appelée *logarithme Néperien*.

#### 4. NOTION D'INTÉGRALE

**Définition 2.** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$  et  $F$  une primitive de  $f$ . Les deux notations qui suivent désignent le nombre  $F(b) - F(a)$  :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Ce nombre est appelé *intégrale* entre  $a$  et  $b$  de la fonction  $f$ . Le  $x$  dans la notation est une variable muette.

**Remarque 1.** On remarque que l'intégrale  $\int_a^b f(x)dx$  ne dépend pas du choix de la primitive  $F$  : en effet, si  $G = F + k$  est une autre primitive de  $f$ ,

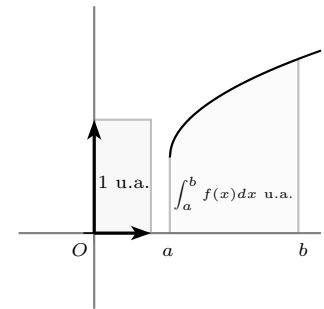
$$G(b) - G(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

**Exemple 11.**  $\int_1^2 3x^2 dx = \dots\dots\dots$

**Théorème 7.**

Si  $f$  est une fonction continue et positive sur un intervalle  $[a; b]$ , l'aire  $\mathcal{A}$  de la surface composée des  $M(x; y)$  tels que  $a \leq x \leq b$  et  $0 \leq y \leq f(x)$  est donnée par

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx \text{ unités d'aire.}$$



**Preuve.** D'après le théorème 5,  $\mathcal{A} = S(b) - S(a)$  où  $S$  est une primitive de  $f$ .

△ l'intégrale donne une surface exprimée en unités d'aire. Pour la convertir en une autre unité (en  $cm^2$  par exemple), on remarque : 1 unité d'aire = unité en  $x \times$  unité en  $y$ .

**Exemple 12.** Calculer en  $cm^2$  l'aire du domaine décrit par  $-1 \leq x \leq 1$  et  $0 \leq y \leq 1 - x^2$

.....  
 .....  
 dans un repère orthonormé d'unité  $0,5 \text{ cm}$  : .....

**Définition 3.** La valeur moyenne d'une fonction continue  $f$  sur un intervalle  $[a; b]$  est

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

**Exemple 13.** moyenne de  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  entre 1 et 5 :  $m = \dots\dots\dots$

**Propriété 8.**

Si  $f$  est continue sur  $I$ , la fonction  $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$  est une primitive de  $f$ .

**Preuve.** si  $F$  primitive de  $f$ ,  $G(x) - F(x) = F(x) - F(a) - F(x) = -F(a)$  constante :  $G$  est bien une autre primitive de  $f$ .

## 5. PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES

### Propriété 9.

*Linéarité.* Si les fonctions  $f$  et  $g$  sont continues sur un intervalle  $[a, b]$ , et  $c \in \mathbb{R}$  :

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \text{ et } \int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

**Preuve.** C'est une conséquence de la propriété analogue des primitives : si  $F$  et  $G$  sont des primitives respectives de  $f$  et  $g$ , alors  $F + G$  est une primitive de  $f + g$  donc :

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \dots = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

De même, si  $F$  est une primitive de  $f$  alors  $cF$  est une primitive de  $cf$  donc

$$\int_a^b cf(x) dx = cF(b) - cF(a) = c(F(b) - F(a)) = c \int_a^b f(x) dx \quad \square$$

### Propriété 10.

*Relation de Chasles.* Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ , et  $a, b, c \in I$  :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx, \text{ en particulier } \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

**Preuve.** On utilise encore la définition : si  $F$  est une primitive de  $f$ , on a :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x) dx$$

En particulier,  $0 = \int_a^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx$ .

**Exemple 14.** Soit  $f$  définie sur  $[0; 2]$  par  $f(x) = 2$  si  $x \leq 1$  et  $f(x) = 2x$  si  $x > 1$ .

$$\int_0^2 f(x) dx = \dots$$

### Propriété 11.

*Positivité.* Si  $f$  est continue, positive et non identiquement nulle sur  $[a; b]$ , alors

$$\int_a^b f(x) dx > 0$$

**Preuve.** Une primitive  $F$  de  $f$  vérifie  $F' = f > 0$  sur  $[a, b]$ ,  $F$  est strictement croissante sur  $[a, b]$  donc  $F(b) > F(a)$  d'où  $0 < F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$

**Remarque 2.** Si  $f \leq g$  sont continues sur  $[a; b]$  alors  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

**Exemple 15.** Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{x^2}$  .....

En déduire :  $\int_1^t \frac{1}{x^2 + 1} dx \leq 1 - \frac{1}{t}$  : .....