Feuille d'exercices 6 -10-10-12-
Terminale ES-L, 2012-2013, Y. Angeli

Exercice 1. Trouver une écriture explicite

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ pour $N \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2}$

① Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{u_{n+1} + u_n}$. En déduire le sens de variations de la suite (u_n).

② Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

③ Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique et exprimer v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

④ Conclure.

Exercice 2. Suites et économie

Un particulier contracte un prêt de $d_0 = 200\,000$€ dans le cadre d'une opération immobilière. Les modalités de remboursement sont les suivantes :

⋆ intérêts : à la fin de chaque année, la somme due au début de l'année augmente de 5%

⋆ remboursement : à la fin de chaque année, le particulier rembourse une somme de r €.

On note d_n la somme due (en euros) au bout de n années.

① Expliquer pourquoi $d_{n+1} = 1{,}05 d_n - r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (du moins tant qu'il reste quelque chose à rembourser).

② Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = d_n - 20r$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison. En déduire que $d_n = 1,05^n\ d_0 - 1{,}05^n \times 20r + 20r$.

③ Quel doit être le montant des annuités r (remboursements annuels, à 10^{-2} près) pour que le prêt soit remboursé au bout de 15 ans ? Combien cela représente-t-il par mois ? À combien se monteront les intérêts, au final ?

Exercice 3. Sens de variations

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et (s_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

① Donner le sens de variation de (u_n). (on étudiera distinguera les cas où $0 < q < 1$, $q = 1$ et $q > 1$)

② Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \dfrac{u_{n+1} - u_0}{q - 1}$.

③ En déduire le sens de variations de (s_n) en fonction de q.

④ Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en argumentant :

⋆ ≪ si (x_n) est une suite et (S_n) est définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $S_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$ alors les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation ≫.

⋆ ≪ Toute suite géométrique est monotone ≫.