Feuille d'exercices 26 -09-04-13-
Terminale ES-L, 2012-2013, Y. Angeli

Exercice 1. Définition du logarithme

Soit $y \in]0;+\infty[$.

① Rappeler, sans le justifier, le sens de variations de la fonction exponentielle.

② Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n$. En déduire qu'il existe b tel que $e^b > y$.

③ Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n}$. En déduire qu'il existe a tel que $e^a < y$.

④ En déduire qu'il existe un unique $x \in [a;b]$ tel que $e^x = y$. Montrer que x est la seule solution de cette équation sur $\mathbb{R}$. On note $x = \ln(y)$ cette solution (logarithme néperien de y) telle que $e^{\ln(y)} = y$.

Dans la suite, on désigne par $\ln :]0;+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x)$.

Exercice 2. Propriétés algébriques

① Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$. (montrer l'égalité de l'exponentielle de chacun des membres et conclure).

② Calculer $\ln(1)$ et $\ln(e)$.

③ Démontrer que pour tous $x, y > 0$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. (même méthode qu'en ①)

④ En déduire : $x, y > 0$, $\ln(1/x) = -\ln(x)$ et $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$.

⑤ Expliquer pourquoi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Exercice 3. Variations

On admet que la fonction logarithme est dérivable sur $]0;+\infty[$.

① Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = e^{\ln(x)}$. Simplifier h et déterminer deux expressions de $h'(x)$, en déduire $\ln'(x)$.

② Quel est le sens de variations de ln ?

Exercice 4. Applications

① Déterminer le tableau de signes de $\ln(x)$.

② Résoudre $e^{2x+1} - 3 > 0$.

③ Étudier la fonction $x\ln(x)$.

④ Calculer $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x}$.