

FEUILLE D'EXERCICES 15 -08-01-13-
Terminale ES-L, 2012-2013, Y. Angeli

EXERCICE 1. Étude d'une fonction puissance

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 1,6^x$.

- ① D'après le cours, quelle est le sens de variation et la convexité de f .
- ② Montrer qu'il existe un unique $a \in]0; 1[$ tel que $e^a = 1,6$, de sorte que $e^{ax} = 1,6^x$.
- ③ Donner une valeur approchée à 10^{-2} près du nombre a . Montrer qu'il s'agit d'une valeur à 10^{-5} près.
- ④ Exprimer, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ et $f''(x)$ en fonction de a . Prouver les deux affirmations de la question ①
- ⑤ Donner une équation de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 0 en fonction de a .
- ⑥ En déduire $1,6^x \geq 0,47x + 1$ pour $x \geq 0$.
- ⑦ À l'aide de l'inégalité de convexité, prouver que $1,6^{0,5} \leq 1,3$.
- ⑧ Déduire des deux questions précédentes un encadrement de $\sqrt{1,6}$.

EXERCICE 2. Selon le bac ES Asie juin 2012, exercice 4 (6 points)

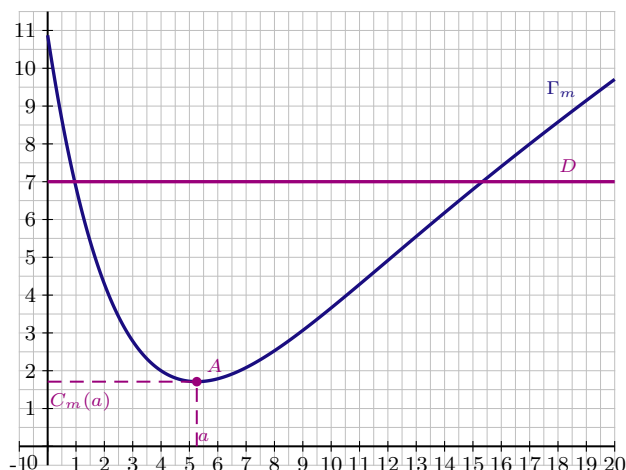
On s'intéresse à une entreprise de détergents industriels. Elle produit chaque jour une quantité q en tonnes comprise entre 0 et 20. On rappelle que :

- * Le coût marginal $C_m(q)$ est la variation du coût obtenue par la production et la vente d'une tonne supplémentaire de détergent sachant qu'on en a déjà vendu une quantité de q tonnes.
- * Le bénéfice marginal $B_m(q)$ est la différence entre le prix unitaire et le coût marginal $C_m(q)$.

Partie A : Aspect graphique

Dans le repère ci-contre, on donne :

- * la courbe représentative Γ_m de la fonction C_m correspondant au coût marginal en milliers d'euros ;
- * la courbe représentative D de U correspondant au prix de vente unitaire en milliers d'euros ;
- * Le point $A(a; C_m(a))$, sommet de la courbe Γ_m .



Répondre aux questions suivantes sans justifier :

- ① Déterminer graphiquement $C_m(4)$.
- ② Déterminer graphiquement $B_m(4)$. Interpréter de ce résultat dans le contexte de l'entreprise.
- ③ Pour quelle(s) quantité(s), en tonnes, le bénéfice marginal est-il nul? (à la demi-tonne près).
- ④ En déduire un encadrement de la quantité à produire, en tonnes, pour obtenir un bénéfice marginal positif.
- ⑤ Donner la convexité du coût total C (tel que $C' = C_m$). Interpréter en terme de rendement marginal.

Partie B : Aspect algébrique

Dans cette partie, le coût marginal est donné pour $q \in [0; 20]$ par $C_m(q) = 0,5q + (4 - q)e^{(1-0,25q)}$ et le prix de vente unitaire est donné par $U(q) = 7$ pour q appartenant à l'intervalle $[0; 20]$.

On admet que la fonction C_m est dérivable sur $[0; 20]$.

Le tableau de variation de la fonction C_m est donné ci-contre.

On admet que le nombre réel a est compris entre 5 et 6.

q	0	a	20
$C'_m(q)$	-	0	+
$C_m(q)$	$C_m(0)$	$C_m(a)$	$C_m(20)$

- ① (a) Justifier que l'équation $C_m(q) = 7$ admet une unique solution q_0 dans l'intervalle $[10; 20]$.
(b) À l'aide de votre calculatrice, donner un arrondi de q_0 au dixième.
(c) Donner, en justifiant, la valeur de $B_m(q_0)$. Ce résultat est-il cohérent avec la question A.3?
- ② On suppose que les coûts fixes sont de 10 000 euros. Vérifier que la fonction C , définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par : $C(q) = 10 + 0,25q^2 + 4qe^{(1-0,25q)}$ est la fonction coût total.
- ③ Déterminer le bénéfice total obtenu pour la fabrication et la vente de 15,3 tonnes de détergent.