

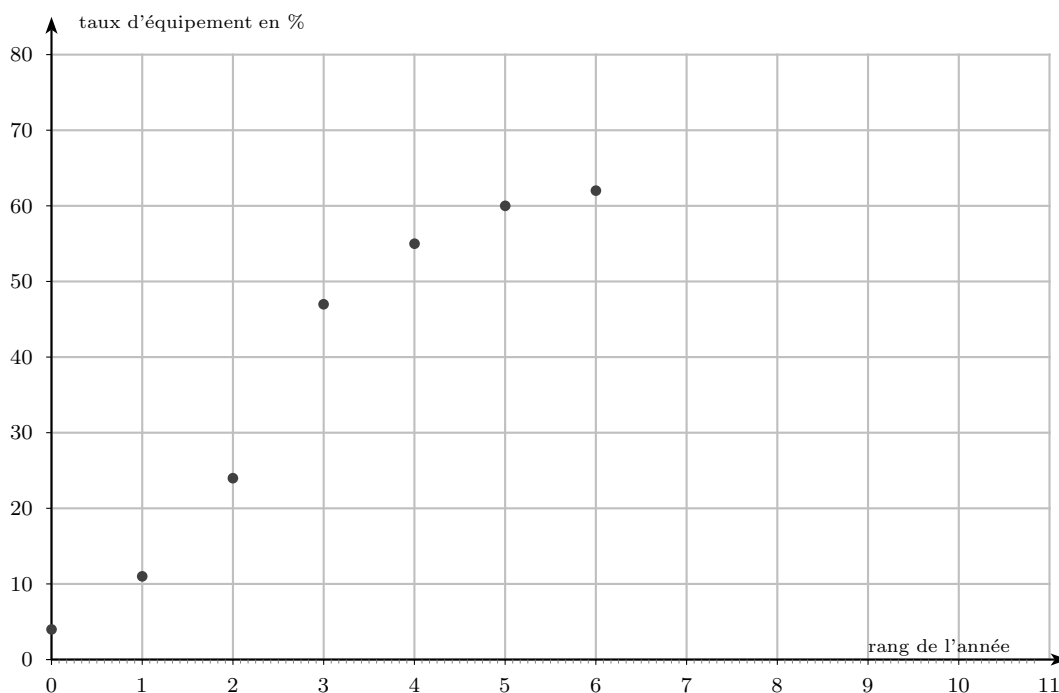
DEVOIR MAISON 6 POUR LE -07-12-12- Terminale ES-L, 2012-2013, Y. Angeli

Les *courbes logistiques* modélisent le taux d'équipement des ménages en fonction du temps de certains biens. Ces évolutions comportent généralement trois phases :

- ★ un démarrage lent
- ★ une diffusion rapide
- ★ une saturation

Ces courbes comportent un point d'inflexion qui correspond au moment où la croissance du taux est la plus rapide.

On considère l'exemple du taux d'équipement des ménages en téléphones portables. Le nuage de points ci-dessous représente le taux d'équipement en ordonnée en fonction de l'année en abscisse, l'abscisse 0 correspondant au premier janvier 1997.



Source : enquête du CREDOC, « Conditions de vie et aspirations »)

EXERCICE 1. Étude graphique

- ① Sur le graphique ci-dessus : représenter soigneusement une courbe, la plus régulière possible (pas de segments ni d'angles), passant par les différents points.
- ② Quel était, approximativement, le taux d'équipement en juin 2001 ?
- ③ À quelle date approximative (mois, année), ce taux a-t-il atteint les 50% ?
- ④ Entre quelles dates (mois, années) la courbe est-elle concave ? À laquelle ou lesquelles des phases citées ci-dessus correspondent ces dates ?
- ⑤ Entre quelles dates (mois, années) la courbe est-elle convexe ? À laquelle ou lesquelles des phases citées ci-dessus correspondent ces dates ?

EXERCICE 2. Étude d'un modèle

Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 85 - \frac{960}{x^2 + 12}$.

Cette fonction modélise le taux d'équipement en fonction de l'année.

- ① Selon ce modèle, quel serait le taux d'équipement en téléphones portables en 2013 ?
- ② Donner une expression de la dérivée de f .
- ③ Dresser le tableau de variations de f .
- ④ Déterminer l'équation réduite $y = ax + b$ de la tangente au point d'abscisse 2.
- ⑤ Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a :

$$f(x) - (ax + b) = -\frac{15(x - 2)^3}{x^2 + 12}$$

(on pourra d'abord réduire $f(x) - (ax + b)$ au même dénominateur puis développer séparément $15(x - 2)^3$ et conclure).

- ⑥ En déduire la position relative de la tangente avec la courbe de f .
- ⑦ Dans ce modèle, quelles sont les coordonnées du point d'inflexion ?
- ⑧ Comparer ces coordonnées à celle de votre étude graphique. Diriez vous que le modèle proposé est fiable ?

EXERCICE 3. Saturation

On s'intéresse au taux de saturation. On note $u_n = f(n)$ où f est la fonction donnée précédemment et n l'année. Le nombre u_n représente le taux de saturation au premier janvier de l'année de rang n .

- ① Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- ② Selon ce modèle, quel pourcentage de la population ne sera jamais équipé de téléphone portable ?