Contrôle 7 -01-03-13-
Terminale ES-L, 2012-2013, Y. Angeli

Exercice 1. Trois calculs indépendants — 6 points

① Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 1$.
Trouver la primitive F de la fonction f qui vérifie : $F(1) = 0$.

② Calculer $\displaystyle\int_0^2 e^{2x}\,dx$.

③ Calculer la valeur moyenne de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{4}{x^2}$ sur l'intervalle $[1;3]$.

Exercice 2. Calcul d'aire — 14 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = xe^x$.
On note F la primitive de f qui s'annule en $x = 1$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
Soit b une constante réelle et g la fonction définie sur $[0;1]$ par $g(x) = (x+b)e^x$.

① On répondra par des considérations *graphiques* pour cette question seulement.
(a) Exprimer, en unités d'aires, l'aire du carré hachuré.
(b) Expliquer pourquoi on a : $\dfrac{1}{8} \leqslant \displaystyle\int_0^{0,5} f(x)\,dx \leqslant \dfrac{1}{4}$.
(c) Expliquer pourquoi F est croissante.
(d) Expliquer pourquoi F est convexe.

② Montrer que pour $x \in [0;1]$, on a : $g'(x) = (x+b+1)e^x$.

③ Pour quelle valeur de b a-t-on $g = f$? (ne pas justifier)

④ Sans recalculer de dérivée, déduire de la question ② que pour tout $x \in [0;1]$:
(a) $f'(x) = (x+1)e^x$ (b) $f''(x) = (x+2)e^x$ (c) $F(x) = (x-1)e^x$

⑤ Vérifier par le calcul que la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ en O a pour équation : $y = x$.

⑥ Étudier la convexité de f. En déduire la position relative de la droite T et de la courbe $\mathcal{C}$.

⑦ Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

⑧ Calculer l'aire grisée unités d'aires puis en centimètres carrés.