CONTRÔLE COMMUN maths obligatoires -06-02-13-
Terminales ES-L, 2012-2013, Lycée Newton

EXERCICE 1. reservé aux élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On rappelle que pour tout évènement A et B d'un univers :

- l'évènement « A et B » est noté $A \cap B$,
- la probabilité de l'évènement A est notée P(A),
- si $P(\mathrm{A}) \neq 0$, alors la probabilité conditionnelle de B sachant A est notée $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$.

Lors de l'année de terminale ES, les trois quarts des élèves travaillent sérieusement tout au long de l'année scolaire.
Un candidat au baccalauréat ES a une probabilité de 0,9 d'obtenir son bac s'il a travaillé sérieusement et une probabilité de 0,2 s'il n'a pas travaillé sérieusement pendant l'année scolaire.
Un candidat est dit surpris s'il est admis alors qu'il n'a pas travaillé sérieusement pendant l'année scolaire ou bien s'il est refusé et qu'il a travaillé sérieusement pendant l'année scolaire.
On note :

- T l'évènement « le candidat a travaillé sérieusement »
- A l'évènement « le candidat est admis au baccalauréat ES »
- S l'évènement « Le candidat est surpris ».

On interroge au hasard un candidat au baccalauréat ES.
Dans tout l'exercice, on donnera des valeurs approchées arrondies au millième.

① Construire un arbre pondéré traduisant les données de l'énoncé.

② Déterminer la probabilité des évènements suivants :

(a) $\mathrm{T} \cap \mathrm{A}$
(b) $\mathrm{T} \cap \overline{\mathrm{A}}$
(c) $\overline{\mathrm{T}} \cap \mathrm{A}$
(d) $\overline{\mathrm{T}} \cap \overline{\mathrm{A}}$

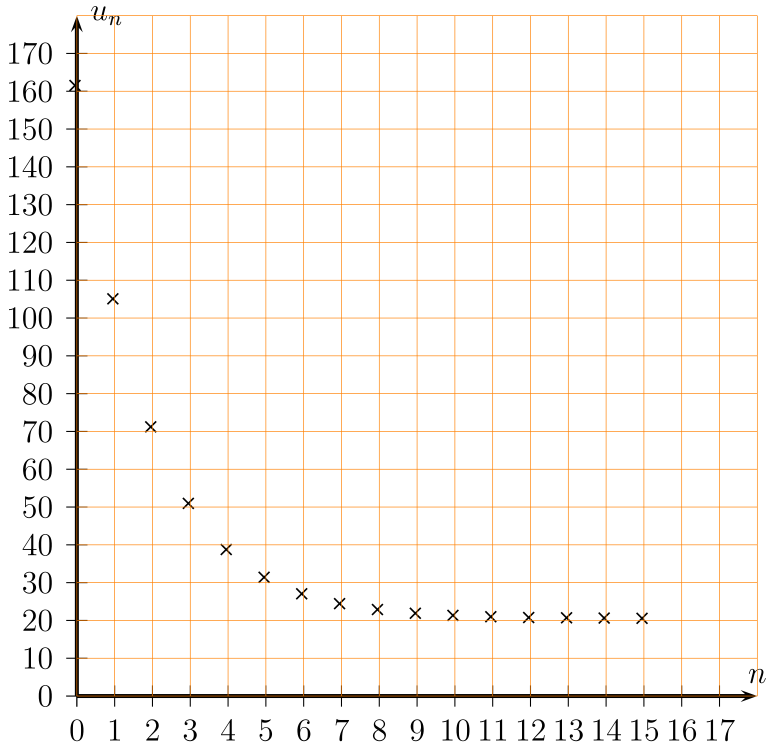
③ (a) Déterminer la probabilité que le candidat interrogé soit admis.
(b) Le candidat est admis.
Déterminer la probabilité que ce candidat ait travaillé sérieusement pendant l'année scolaire.

④ Démontrer que la probabilité de l'évènement S est 0,125.

⑤ On interroge cinq élèves au hasard.
Calculer la probabilité qu'au moins un élève soit surpris.

EXERCICE 2. commun à tous — 5 points

A - Observation d'une suite de nombres



① On donne ci-dessus la représentation graphique des 16 premiers termes d'une suite (u_n) dans le plan muni d'un repère orthogonal.
Conjecturer la limite de la suite (u_n).

② Les quatre premiers termes de la suite (u_n) ont été calculés avec un tableur :

n	u_n
0	161
1	104,6
2	70,76
3	50,456

La suite (u_n) peut-elle être une suite géométrique ? On justifiera la réponse donnée.

B - Étude de la suite

La suite (u_n) observée dans la partie A est définie pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = 0,6u_n + 8 \text{ et } u_0 = 161.$$

① Calculer u_4.

② Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. On précisera le premier terme et la raison.

③ Donner l'expression de v_n en fonction de n, puis l'expression de u_n en fonction de n.

④ Déterminer la limite de la suite (v_n) et en déduire celle de la suite (u_n).

⑤ Écrire l'algorithme d'un programme qui demande à l'utilisateur de saisir un entier naturel n et affiche en résultat le nombre u_n.

Exercice 3. commun à tous 9 points

On s'intéresse à la production mensuelle d'une certaine catégories d'articles par une entreprise E. On sait que le nombre d'articles produits par mois est compris entre 0 et 500. On suppose que le coût total, exprimé en milliers d'euros, peut être modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;\,5]$ par

$$C(x) = 2x^2 + x\mathrm{e}^{-2x+3}$$

où x représente le nombre de centaines d'articles fabriqués.

① On sait que la fonction coût marginal, notée C', est la dérivée de la fonction C sur $[0\,;\,5]$. Justifier que $C'(x) = 4x + (1-2x)\mathrm{e}^{-2x+3}$.

② On admet que la fonction C'' vérifie le tableau de variations suivant :

x	0	1,5	5
		6	
C''		$\nearrow$ $\searrow$	
	$4-e^3$		$4+4e^{-7}$

(a) Montrer que l'équation $C''(x) = 0$ admet une solution α unique sur $[0; 1{,}5]$.

(b) En déduire le signe de C'' sur $[0; 5]$.
Interpréter le résultat en terme de convexité de C.

③ La fonction coût moyen, notée C_M est la fonction définie sur $]0\,;\,5]$ par :

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

Donner une expression de $C_M(x)$, en fonction de x.

④ (a) Déterminer $C'_M(x)$ où C'_M désigne la fonction dérivée de C_M.

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $1 - \mathrm{e}^{-2x+3} = 0$.

(c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $1 - \mathrm{e}^{-2x+3} > 0$.

(d) En déduire le sens de variations de C_M sur $]0\,;\,5]$.

⑤ Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal et quel est ce coût en euros ?

⑥ Chaque centaine d'articles est vendue 7 000 €. La recette totale pour x centaines d'articles est donnée, en admettant que toute la production soit vendue, par $R(x) = 7x$ en milliers d'euros.
Le bénéfice est donc défini par $B(x) = R(x) - C(x)$.
En annexe sont représentées les fonctions C et R.
Par lecture graphique déterminer :

(a) l'intervalle sur lequel le rendement marginal est croissant (ce qui singnifie que le coût marginal décroissant)

(b) le coût moyen minimal,

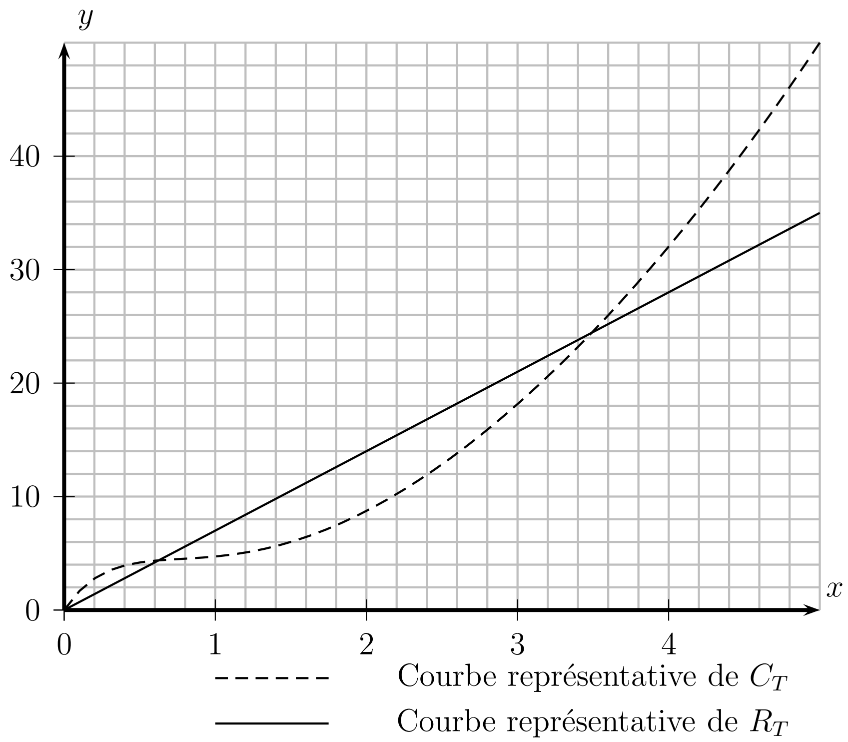
(c) l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour qu'il y ait un bénéfice positif de l'entreprise E,

(d) la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.

On fera apparaître les constructions nécessaires.

⑦ Avec l'aide de votre calculatrice, affiner l'intervalle (à un article près) dans lequel doit se situer la production x pour qu'il y ait un bénéfice positif de l'entreprise E.

Annexe



y
40
30
20
10
0
x
0
1
2
3
4
Courbe représentative de C_T
Courbe représentative de R_T

Nom : ....