Mathématiques Obligatoires -12-12-12-
Terminales ES-L, 2012-2013, Lycée Newton

Exercice 1. 3 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

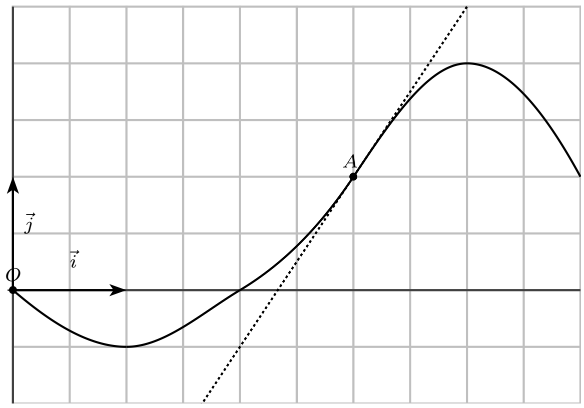
La courbe $\mathcal{C}_f$ (en traits pleins) ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 5]$.

La droite T (en pointillés) est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(3; 1)$.

La fonction F est définie et dérivable sur $[0; 5]$, de dérivée f. Elle vérifie $F(2) = 0$. On note $\mathcal{C}_F$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

① Répondre sans justifier :
   (a) Donner $f(1)$.
   (b) Résoudre $f(x) \geqslant 0$.

② Expliquer chaque réponse :
   (a) Déterminer $f'(3)$.
   (b) Dresser le tableau de signes de f'.
   (c) Donner le tableau de variations de F.



Exercice 2. Reservé aux élèves qui ne suivent pas l'option de spécialité (5 points)

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2010+n)$. En 2010, la forêt possède 50 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

① Montrer que la situation peut être modélisée par :

$$u_0 = 50 \text{ et pour tout entier naturel } n \text{ par la relation : } u_{n+1} = 0,95u_n + 3.$$

② Calculer u_1. Combien d'arbre comptera la forêt en 2012 ?

③ On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 60 - u_n$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,95$.
   (b) Calculer v_0. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 60 - 10 \times (0,95)^n$.

④ Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2015. On donnera une valeur approchée arrondie à l'unité.

⑤ (a) Vérifier que pour tout entier naturel n, on a l'égalité

$$u_{n+1} - u_n = 0{,}5 \times (0{,}95)^n.$$

   (b) En déduire la monotonie de la suite.

⑥ Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter.

EXERCICE 3. Communs à tous (6 points)

L'entreprise CoTon produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.

Le coût total de production en euros de l'entreprise CoTon est donné en fonction de la longueur x par la formule

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750.$$

Le graphique de l'annexe donne la représentation graphique de la fonction C.

Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes

Partie A : Étude du bénéfice

Si le marché offre un prix p en euros pour un kilomètre de ce tissu, alors la recette de l'entreprise CoTon pour la vente d'une quantité x est égal à $R(x) = px$.

① Tracer sur le graphique de l'annexe 2 la droite D_1 d'équation $y = 400x$.
Expliquer, au vu de ce tracé, pourquoi l'entreprise CoTon ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix p du marché est égal à 400 euros.

② Dans cette question on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros.

(a) Tracer sur le graphique de l'annexe 2 la droite D_2 d'équation $y = 680x$.
Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise CoTon réalise un bénéfice si le prix p du marché est de 680 euros.

(b) On considère la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;\ 10]$ par $B(x) = 680x - C(x)$.
Démontrer que pour tout $x \in [0\ ;\ 10]$ on a : $B'(x) = -45x^2 + 240x + 180$

(c) Étudier les variations de la fonction B sur $[0\ ;\ 10]$.
En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise CoTon est maximum. Donner la valeur de ce bénéfice.

Partie B : Étude du coût moyen

On rappelle que le coût moyen de production C_M mesure le coût par unité produite. On considère la fonction C_M définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ par

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

① Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,10]$ on a :

$$C'_M(x) = \frac{30(x-5)\left(x^2+x+5\right)}{x^2}.$$

② (a) Démontrer que pour tout $x \in]0\ ;\ 10]$, $C'_M(x)$ est du signe de $(x-5)$.
En déduire les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.

(b) Pour quelle quantité de tissu produite le coût moyen de production est-il minimum ?
Que valent dans ce cas le coût moyen de production et le coût total ?

Exercice 4. Commun à tous (6 points)

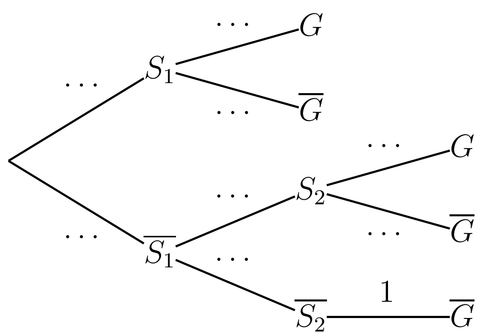
Au tennis, le joueur qui « est au service » joue une première balle.
Si elle est jugée « bonne », il joue l'échange et peut gagner ou perdre.
Si elle est jugée « faute », il joue une deuxième balle.
Si cette deuxième balle est jugée « bonne », il joue l'échange et peut gagner ou perdre.
Si cette deuxième balle est jugée « faute », il perd.
On désigne par
S_1 : l'évènement « la 1re balle de service est « bonne » ;
S_2 : l'évènement « la 2e balle de service est « bonne » ;
G : l'évènement « le point est gagné par le joueur qui est au service ».

Pour le joueur Naderer qui est au service, on dispose des données suivantes :

- sa première balle de service est jugée « bonne » dans 40 % des cas ;
- sa deuxième balle de service est jugée « bonne » dans 95 % des cas ;
- si sa première balle de service est jugée « bonne », il gagne l'échange dans 80 % des cas ;
- si sa deuxième balle de service est jugée « bonne », il gagne l'échange dans 60 % des cas.

Pour tout évènement A on note $\overline{A}$ l'évènement contraire.

① Recopier et compléter l'arbre suivant :



② Calculer $p\left(S_1 \cap G\right)$.

③ Montrer que la probabilité que le joueur Naderer gagne l'échange est de $0,662$.

④ Sachant que le joueur Naderer a gagné l'échange, calculer la probabilité que sa première balle de service ait été jugée « bonne ». Le résultat sera arrondi au millième.

⑤ (a) Calculer la probabilité que le joueur Naderer gagne quatre échanges consécutifs. On donnera le resultat arrondi au millième.

(b) Calculer la probabilité que Naderer gagne exactement trois échanges sur quatre.

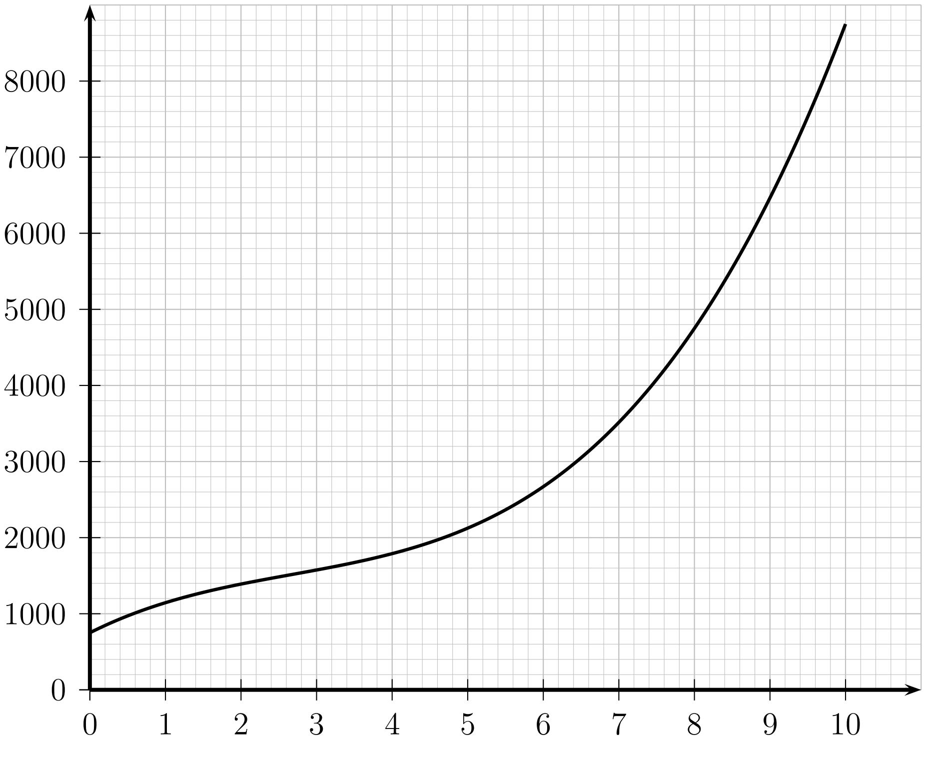
⑥ Un site internet organise des paris sportifs sur un échange de la partie. Naderer est au service. Le parieur paie 4 euros pour jouer, et gagne 7 euros si Naderer sort vainqueur de l'échange sur son premier service, 5 euros s'il gagne sur son second service. Si Naderer perd, le parieur ne gagne rien. On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique du parieur.

(a) Recopier et compléter (avec des valeurs exactes) le tableau suivant, qui donne la loi de probabilité de la variable aléatoire G :

Valeur k du gain	3	1	-4
Probabilité $p(G = k)$			

(b) Calculer l'espérance de la variable aléatoire G. Ce jeu bénéficie-t-il au parieur ou à l'organisateur ?

Annexe à rendre avec la copie



Nom : ....

Mathématiques Spécialité -12-12-12-
Terminales ES-L, 2012-2013, Lycée Newton

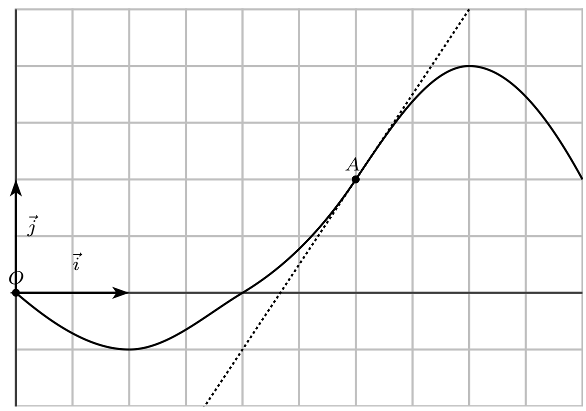
Exercice 1. 3 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ (en traits pleins) ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 5]$.

La droite T (en pointillés) est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(3; 1)$.

La fonction F est définie et dérivable sur $[0; 5]$, de dérivée f. Elle vérifie $F(2) = 0$. On note $\mathcal{C}_F$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

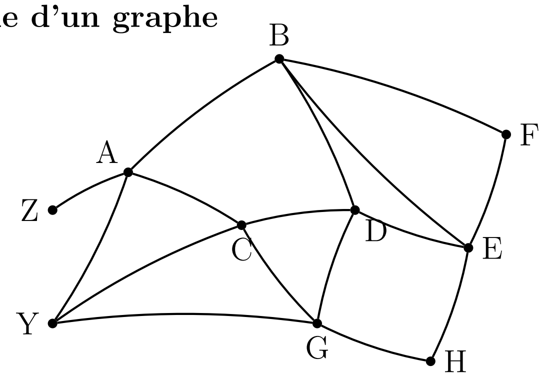


① Répondre sans justifier :
  (a) Donner $f(1)$.
  (b) Résoudre $f(x) \geqslant 0$.

② Expliquer chaque réponse :
  (a) Déterminer $f'(3)$.
  (b) Dresser le tableau de signes de f'.
  (c) Donner le tableau de variations de F.

Exercice 2. Reservé aux élèves suivant l'enseignement de spécialité (5 points)

Première Partie : Étude d'un graphe



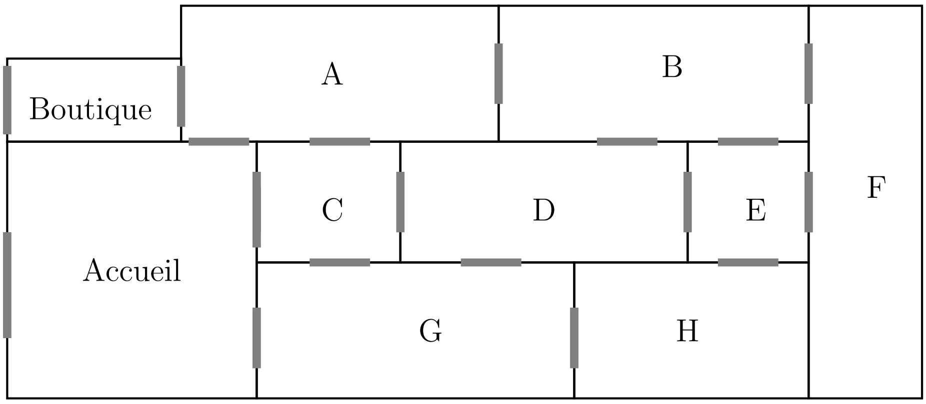
On considère le graphe ci-dessus.

① (a) Ce graphe est-il connexe ?
  (b) Déterminer le degré de chacun des sommets.
  On pourra donner le résultat sous forme de tableau.
  (c) En déduire le nombre d'arêtes. Justifier par une propriété.
  (d) Justifier l'existence d'une chaîne eulérienne.

② (a) Déterminer un encadrement du nombre chromatique de ce graphe.
  (b) Montrer que ce nombre chromatique est égal à 3.

(Tourner la page)

Deuxième Partie : Visite d'un musée



Voici le plan d'un musée : les parties grisées matérialisent les portes et les visiteurs partent de l'accueil, visitent le musée et doivent terminer leur visite la la boutique.

① Représenter la situation à l'aide d'un graphe en précisant ce que représentent arêtes et sommets.

② (a) Pourquoi est-il possible de trouver un circuit où les visiteurs passent une fois et une seule par toutes les portes ?

(b) Les visiteurs, en entrant dans chaque salle, reçoivent une plaquette de présentation de la salle, quel est le nombre minimum de plaquettes qu'ils auront en main en arrivant à la boutique, s'ils ont suivi un circuit dans lequel ils sont passés une fois et une seule par toutes les portes ?

(c) Donner un exemple d'un tel circuit.

③ On note G_2 le sous-graphe obtenu en supprimant la boutique et l'accueil.

Ecrire la matrice d'adjacence M du sous-graphe G_2(en ordonnant les sommets dans l'ordre alphabétique de A à H).

On donne les matrices M^2 et M^3 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 9 & 7 & 6 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 7 & 4 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 7 & 4 & 9 & 2 & 7 & 2 \\ 3 & 7 & 4 & 9 & 4 & 6 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 6 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 6 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Un visiteur est actuellement dans la salle B, on lui signale qu'il a laissé un sac dans la salle E ; devant le récupérer, il souhaite passer au maximum par trois portes. Indiquer le nombre de possibilités, en utilisant les matrices.

Exercice 3. Communs à tous (6 points)

L'entreprise CoTon produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.
Le coût total de production en euros de l'entreprise CoTon est donné en fonction de la longueur x par la formule

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750.$$

Le graphique de l'annexe donne la représentation graphique de la fonction C.

Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes

Partie A : Étude du bénéfice

Si le marché offre un prix p en euros pour un kilomètre de ce tissu, alors la recette de l'entreprise CoTon pour la vente d'une quantité x est égal à $R(x) = px$.

① Tracer sur le graphique de l'annexe 2 la droite D_1 d'équation $y = 400x$.
Expliquer, au vu de ce tracé, pourquoi l'entreprise CoTon ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix p du marché est égal à 400 euros.

② Dans cette question on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros.

(a) Tracer sur le graphique de l'annexe 2 la droite D_2 d'équation $y = 680x$.
Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise CoTon réalise un bénéfice si le prix p du marché est de 680 euros.

(b) On considère la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;\ 10]$ par $B(x) = 680x - C(x)$.
Démontrer que pour tout $x \in [0\ ;\ 10]$ on a : $B'(x) = -45x^2 + 240x + 180$

(c) Étudier les variations de la fonction B sur $[0\ ;\ 10]$.
En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise CoTon est maximum. Donner la valeur de ce bénéfice.

Partie B : Étude du coût moyen

On rappelle que le coût moyen de production C_M mesure le coût par unité produite. On considère la fonction C_M définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ par

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

① Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,10]$ on a :

$$C'_M(x) = \frac{30(x-5)\left(x^2+x+5\right)}{x^2}.$$

② (a) Démontrer que pour tout $x \in]0\ ;\ 10]$, $C'_M(x)$ est du signe de $(x-5)$.
En déduire les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.

(b) Pour quelle quantité de tissu produite le coût moyen de production est-il minimum ?
Que valent dans ce cas le coût moyen de production et le coût total ?

Exercice 4. Commun à tous (6 points)

Au tennis, le joueur qui « est au service » joue une première balle.
Si elle est jugée « bonne », il joue l'échange et peut gagner ou perdre.
Si elle est jugée « faute », il joue une deuxième balle.
Si cette deuxième balle est jugée « bonne », il joue l'échange et peut gagner ou perdre.
Si cette deuxième balle est jugée « faute », il perd.
On désigne par

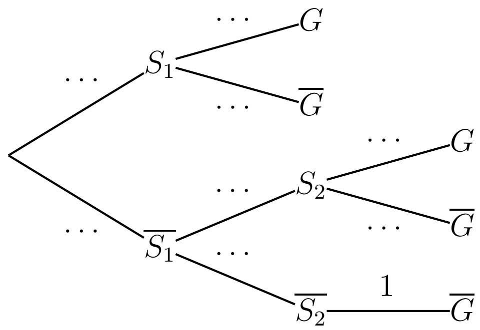
S_1 : l'évènement « la 1re balle de service est « bonne » ;
S_2 : l'évènement « la 2e balle de service est « bonne » ;
G : l'évènement « le point est gagné par le joueur qui est au service ».

Pour le joueur Naderer qui est au service, on dispose des données suivantes :

- sa première balle de service est jugée « bonne » dans 40 % des cas ;
- sa deuxième balle de service est jugée « bonne » dans 95 % des cas ;
- si sa première balle de service est jugée « bonne », il gagne l'échange dans 80 % des cas ;
- si sa deuxième balle de service est jugée « bonne », il gagne l'échange dans 60 % des cas.

Pour tout évènement A on note $\overline{A}$ l'évènement contraire.

① Recopier et compléter l'arbre suivant :



② Calculer $p(S_1 \cap G)$.

③ Montrer que la probabilité que le joueur Naderer gagne l'échange est de $0,662$.

④ Sachant que le joueur Naderer a gagné l'échange, calculer la probabilité que sa première balle de service ait été jugée « bonne ». Le résultat sera arrondi au millième.

⑤ (a) Calculer la probabilité que le joueur Naderer gagne quatre échanges consécutifs. On donnera le resultat arrondi au millième.

(b) Calculer la probabilité que Naderer gagne exactement trois échanges sur quatre.

⑥ Un site internet organise des paris sportifs sur un échange de la partie. Naderer est au service. Le parieur paie 4 euros pour jouer, et gagne 7 euros si Naderer sort vainqueur de l'échange sur son premier service, 5 euros s'il gagne sur son second service. Si Naderer perd, le parieur ne gagne rien. On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique du parieur.

(a) Recopier et compléter (avec des valeurs exactes) le tableau suivant, qui donne la loi de probabilité de la variable aléatoire G :

Valeur k du gain	3	1	-4
Probabilité $p(G = k)$			

(b) Calculer l'espérance de la variable aléatoire G. Ce jeu bénéficie-t-il au parieur ou à l'organisateur ?