Contrôle 3 : probabilités -23-11-12-
Terminale ES-L, 2012-2013, Y. Angeli

Les résultats seront arrondis au millième.

Un chalutier se rend sur sa zone de pêche. La probabilité qu'un banc de poissons soit sur cette zone est de 0,7. Le chalutier est équipé d'un sonar pour détecter la présence d'un banc de poissons. Si un banc est présent, le sonar indique la présence du banc dans 80 % des cas. S'il n'y pas de banc de poissons dans la zone de pêche, le sonar indique néanmoins la présence d'un banc dans 5 % des cas. On note :

- ⋆ B l'évènement : « il y a un banc de poissons sur zone » et $\overline{B}$ l'évènement contraire de B,
- ⋆ S l'évènement : « le sonar indique l'existence d'un banc de poissons » et $\overline{S}$ l'évènement contraire de S.

① Donner la probabilité qu'un banc de poisson ne soit pas sur la zone de pêche puis donner $p_{\bar{B}}(S)$ et décrire en français ce que représente cette probabilité.

② Modéliser la situation par un arbre pondéré.

③ Décrire en français l'évènement $B \cap S$ et calculer sa probabilité.

④ Montrer que la probabilité que le sonar indique la présence d'un banc de poissons (réel ou fictif) est 0,575.

⑤ Lorsque le sonar détecte un banc de poisson, quelle est la probabilité qu'il y en ait réellement un ?

⑥ Quelle est la probabilité que le sonar détecte un banc de poisson ou qu'il y ait un banc de poisson sur la zone de pêche ?

⑦ Lors d'une sortie en mer, le pêcheur se trouve toujours dans l'une des trois situations suivantes :

- ⋆ *Situation 1* : un banc de poissons est présent sur la zone et le sonar le détecte. Le filet est lancé et la pêche est fructueuse. Dans ce cas le pêcheur gagne 2 000 euros.
- ⋆ *Situation 2* : il n'y a pas de banc de poissons sur zone mais le sonar en signale un. Le filet est lancé pour rien. Dans ce cas le pêcheur perd 500 euros.
- ⋆ *Situation 3* : le sonar ne détecte aucun banc de poisson (qu'il y en ait ou pas). Le filet n'est pas lancé et le bateau rentre au port à vide. Dans ce cas le pêcheur perd 300 euros.

(a) On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros réalisé pendant une sortie. Donner la loi de probabilité de G.

(b) Le pêcheur effectue de nombreuses sorties. Quel gain par sortie peut-il espérer avoir ?

⑧ Le pêcheur prévoit d'effectuer 6 sorties successives (considérees comme indépendantes) sur la zone de pêche. Déterminer la probabilité que le sonar indique un banc de poisson lors d'exactement 3 sorties sur les 6.

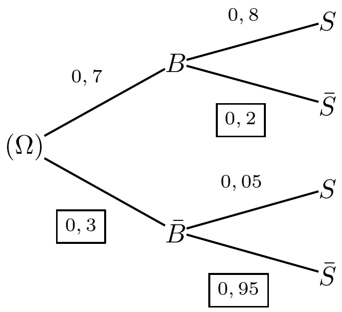
⑨ Soit n un nombre entier naturel. Montrer que la probabilité que, lors de n sorties indépendantes, le sonar indique au moins un banc de poisson, est de $1 - 0,425^n$.

⑩ Quelle est la limite de cette probabilité en lorsque n tend vers l'infini ? Comment l'interpréter ?

Corrigé du contrôle 3 -23-11-12- Terminale ES-L, 2012-2013, Y. Angeli

1. $p(B) = 0{,}7$ (« la probabilité qu'un banc de poisson soit sur cette zone est de 0,7 ») : $\boxed{p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 0{,}3}$
$\boxed{p_{\bar{B}}(S) = \frac{5}{100} = 0{,}05}$ (« s'il n'y a pas de banc dans la zone de pêche, le sonar indique néanmoins la présence d'un banc dans 5% des cas »).

2. Les probabilités encadrées sont obtenues par la loi des nøuds, les autres viennent de l'énoncé. Les compléments à côtés sont ajoutés lors des questions suivantes.



: $p(B \cap S) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$ (+2 000€)

: $p(B \cap S) = 0,7 \times 0,2 = 0,14$ (- 300€)

: $p(\bar{B} \cap S) = 0,3 \times 0,05 = 0,015$ (-500€)

: $p(\bar{B} \cap \bar{S}) = 0,3 \times 0,95 = 0,275$ (-300€)

3. L'évènement $B \cap S$ est : « il y a un banc de poisson sur la zone de pêche, **et** il est détécté par le sonar ».
$p(B \cap S) = p(B) \times p_B(S) = 0,8 \times 0,7 = 0,56$. Donc $\boxed{p(B \cap S) = 0,56}$

4. D'après la formule des probabilités totales,
$p(S) = p(B \cap S) + p(\bar{B} \cap S) = 0,56 + p(\bar{B}) \times p_{\bar{B}}(S) = 0,56 + 0,3 \times 0,05 = 0,575$ donc $\boxed{p(S) = 0,575}$

5. $p_S(B) = \dfrac{p(B \cap S)}{p(S)} = \dfrac{0,56}{0,575} \approx 0,974$. donc $\boxed{p_S(B) \approx 0,974}$

6. $p(B \cup S) = p(B) + p(S) - p(B \cap S) = 0{,}7 + 0{,}575 - 0{,}56 = 0{,}715$ donc $\boxed{p(B \cup S) = 0{,}715}$

7a. On note G le gain algébrique obtenu :
$p(G = 2000) = p(B \cap S) = 0,56$; $p(G = -500) = p(\bar{B} \cap S) = 0,015$ et $p(G = -300) = p(\bar{S}) = 1 - p(S) = 0{,}425$.

Donc :

Gain : k	2 000	-500	-300
Probabilité : $p(G = k)$	0,56	0,015	0,425

7b. L'espérance de G donne le gain moyen par sortie pour un grand nombre de sorties :
$\mathbb{E}(G) = 2000 \times 0,56 + (-500) \times 0,015 + (-300) \times 0,425 = 985$: $\boxed{\mathbb{E}(G) = 985€}$
Le gain par sortie que le pêcheur peut espérer est de 985 euros.

8. La variable aléatoire X égale au nombre de fois que le sonar détecte un banc de poisson suit la loi binomiale de paramètre 6 et 0,575 : en effet, X compte le nombre de succès S d'une expérience a deux issues avec $p(S) = 0{,}575$ répétée 6 fois à l'identique de manière indépendante. Ainsi,

$p(X = 3) = \binom{6}{3} 0{,}575^3 (1 - 0{,}575)^3$ donc $\boxed{p(X = 3) \approx 0{,}292}$

9. De même, la variable X égale au nombre de détections d'un banc de poisson par le sonar suit la loi binomiale de paramètres n et 0,575 de sorte que :

$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} 0{,}575^0 \times 0{,}425^n = 1 - 0{,}425^n$: $\boxed{p(X \geqslant 1) = 1 - 0{,}425^n}$

10. Comme $-1 < 0{,}425 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}425^n = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - 0{,}425^n = 1}$

Ainsi, la probabilité que le sonar se déclenche après un grand nombre de sorties tend vers 1.