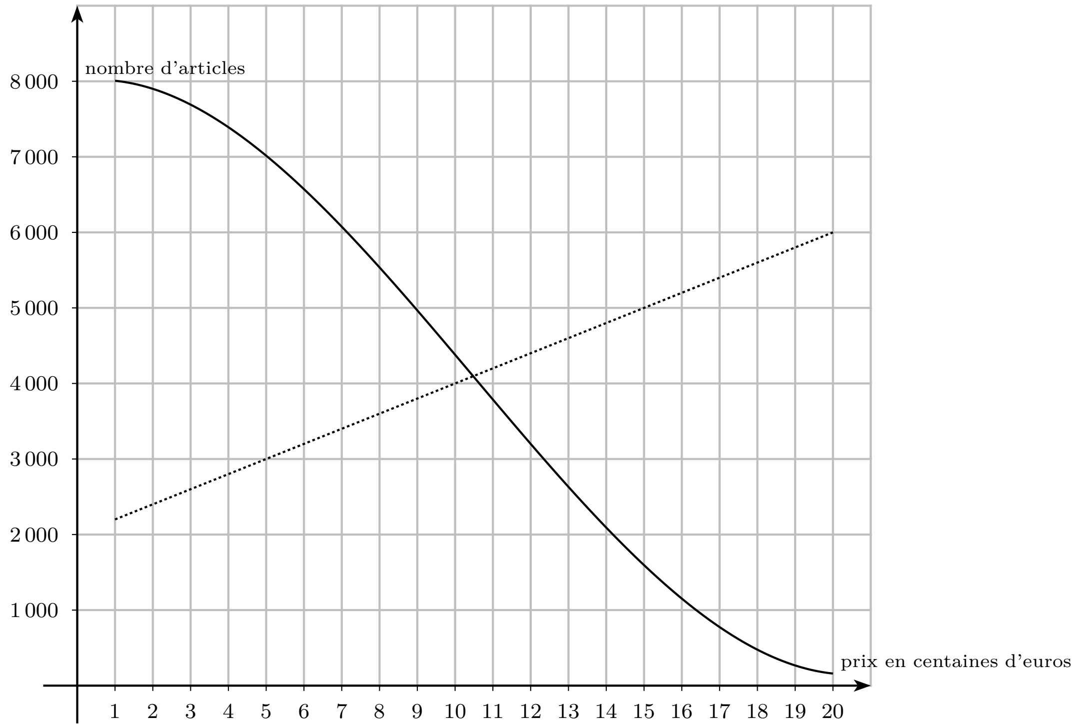
Contrôle commun -17-10-12-
Terminales ES-L, 2012-2013, Lycée Newton

Exercice 1.

Le nombre $x \in [1\,;20]$ désigne un prix en centaine d'euros.

La fonction f représente, en fonction du prix x de l'article, la demande des clients (la quantité d'articles qu'ils sont prêts à acheter à ce prix) . Elle est représentée en traits pleins.

La fonction g représente, en fonction du prix x d'un article, l'offre d'un vendeur (la quantité d'articles qu'il est prêt à vendre à ce prix). Elle est tracée en trait pointillés.



① Par lecture graphique déterminer :

(a) Les sens de variation respectifs de f et g sur l'intervalle $[1; 20]$ (sans justifier).

(b) pour un prix de 500€, le nombre de clients non satisfaits (qui n'ont pas pu acheter l'article faute de quantités vendues suffisantes). Expliquer brièvement.

(c) Le prix d'équilibre α : prix pour lequel l'offre et la demande sont égales. (sans justifier)

(d) Le tableau de signes de $f(x) - g(x)$ (sans justifier) sur l'intervalle $[1; 20]$.

(e) Justifer par le calcul que $g(x) = 200\,x + 2\,000$ (*on utilisera des points de la droite dont les coordonnées sont simples*).

② La fonction demande f est donnée pour $x \in [1; 20]$ par $f(x) = 2x^3 - 63x^2 + 68x + 8\,000$. Pour tout $x \in [1; 20]$, on pose $d(x) = f(x) - g(x)$.

(a) Calculer $d(5)$ et interpréter le résultat.

(b) Montrer que $d'(x) = 6x^2 - 126x - 132$ pour $x \in [1; 20]$ et dresser le tableau de variations de d sur l'intervalle $[1; 20]$.

(c) Démontrer que l'équation $d(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [1; 20]$.

(d) A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près, puis le prix d'équilibre à l'euro près ainsi que la quantité d'objets échangés à ce prix.

(e) En déduire, le tableau de signes de $d(x)$ (on justifiera l'ordre des signes) et la position relative des courbes représentatives de f et de g sur l'intervalle $[1; 20]$.

③ On cherche à optimiser l'argent total (la recette) encaissé par les commerçants par la vente de l'article. On note $R(x)$ cette somme en centaine d'euros.

(a) Expliquer pourquoi, si x est le prix de l'article en centaine d'euros, on a $R(x) = xf(x)$.

(b) A l'aide de la calculatrice et en choisissant une fenêtre adaptée, déterminer le prix, à l'euro près, qui maximise $R(x)$

Exercice 2.

Le client d'une banque a deux options pour placer ses économies :

Le placement U, à intérêts simples :

- ⋆ Chaque année, le client verse 6 000 euros sur ce compte (12 mensualités de 500 euros)
- ⋆ À la fin de chaque année, le client reçoit des intérêts égaux à 5% du montant de son compte.
- ⋆ Les intérêts sont versés sur un autre compte et donnés au client lorsqu'il ferme son placement U, en plus des sommes qu'il a versé. Ainsi, les intérêts d'une année ne contribuent pas à augmenter les intérêts de l'année suivante.

Le placement V, à intérêts composés :

- ⋆ Chaque année, le client verse 6 000 euros sur ce compte (12 mensualités de 500 euros)
- ⋆ À l'issue de chaque année, l'épargnant gagne des intérêts équivalents à 4% du montant de son compte.
- ⋆ Les intérêts sont versés sur le même compte. Ainsi, les intérêts d'une année contribuent à augmenter les intérêts de l'année suivante.

On note u_n le solde en euros du compte U à l'année n (à son ouverture, le compte est vide donc $u_0 = 0$). On note i_n la somme contenue sur le compte servant à recevoir les intérêts du placement U à l'année n.

On note v_n le solde en euros du compte V à l'année n (à son ouverture, $v_0 = 0$).

① Étude du placement U.

(a) Expliquer pourquoi, d'après l'énoncé, (u_n) est une suite arithmétique de raison 6 000. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

(b) À l'aide de l'énoncé, expliquer pourquoi $i_n = 0{,}05(u_1 + \cdots + u_n)$.
En déduire que $i_n = 150\,n(n+1)$.

② Étude du placement V.

(a) À l'aide de l'énoncé, expliquer pourquoi on a : $v_{n+1} = 1{,}04v_n + 6\,240$.

(b) On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite $w_n = v_n + 156\,000$. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique de raison 1,04 et de premier terme $w_0 = 156\,000$.

(c) En déduire une expression de w_n puis de v_n en fonction de n.

(d) Expliquer pourquoi au bout de n années, les intérêts de ce placement sont donnés par $j_n = 156\,000 \times 1{,}04^n - 156\,000 - 6\,000\,n$.

③ Comparaison des deux placements. (utiliser i_n et j_n des questions ①b et ②d)

(a) Comparer i_{10} et j_{10}. L'épargnant veut réaliser un placement sur dix ans. Lequel des deux modèles doit-il choisir ?

(b) Pour un placement sur 20 ans, lequel des deux modèles faut-il choisir ? (justifier)

(c) L'algorithme suivant affiche 18. Comment interpréter ce résultat ?

```
N prend la valeur 0
Tant que 156 000 × 1,04^N − 156 000 − 6000N ⩽ 150N(N + 1)
    N prend la valeur N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```