

CHAPITRE 8 : LOIS CONTINUES -19-03-13-  
Terminale ES-L, 2012-2013, Y. Angeli

1. NOTION DE DENSITÉ

**Définition 1.** Une *densité de probabilité*  $f$  sur un intervalle  $I = [a; b]$  est une fonction continue et positive sur  $I$ , telle que :  $\int_a^b f(x)dx = 1$ .

**Exemple 1.** Déterminer  $k$  afin que  $f : x \mapsto kx^2$  soit une densité de probabilité sur  $[0; 1]$ .

.....

.....

**Définition 2.** Une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $I = [a; b]$  suit la loi de probabilité de densité  $f$  lorsque pour tout nombres  $\alpha$  et  $\beta$  de  $I$  on a :  $\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$ .

Dans ce cas, la variable aléatoire  $X$  est dite *continue*.

**Exemple 2.** Dans le cas d'un variable aléatoire qui suit la loi de densité  $f$  de l'exemple 1,

$\mathbb{P}(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}) = \dots\dots\dots$

$\mathbb{P}(X > \frac{1}{2}) = \dots\dots\dots$

Propriété 1.

Soit  $X$  une variable aléatoire continue et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Alors :

①  $\mathbb{P}(X > \alpha) = 1 - \mathbb{P}(X \leq \alpha)$     ②  $\mathbb{P}(X = \alpha) = 0$     ③  $\mathbb{P}(\alpha < X < \beta) = \mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta)$

**Preuve.** Dans le cas d'une densité  $f$  sur un intervalle  $[a; b]$ , pour  $a \leq \alpha \leq \beta < b$ .

$$1 - \mathbb{P}(X \leq \alpha) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^\alpha f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_\alpha^a f(x)dx = \int_\alpha^b f(x)dx = \mathbb{P}(X > \alpha).$$

On a :  $\mathbb{P}(X = \alpha) = \mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \alpha) = \int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$  d'où vient aussi le dernier résultat.

**Définition 3.** L'*espérance*  $\mathbb{E}(X)$ , la variance  $\mathbb{V}\text{ar}(X)$  et l'écart-type  $\sigma(X)$  d'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $[a; b]$  de densité  $f$  sont définis par :

$$\mathbb{E}(X) = \int_a^b xf(x)dx \quad \mathbb{V}\text{ar}(X) = \int_a^b x^2f(x)dx - \mathbb{E}(X)^2 \quad \sigma(x) = \sqrt{\mathbb{V}\text{ar}(X)}$$

L'espérance s'interprète comme la valeur moyenne de la variable aléatoire  $X$ .

La *médiane* d'une variable aléatoire  $X$  est la valeur  $m$  telle que  $\mathbb{P}(X \leq m) = 0,5$ .

**Exemple 3.** Dans le cas d'un variable aléatoire qui suit la loi de densité  $f$  de l'exemple 1,

$\mathbb{E}(X) = \dots\dots\dots$

Médiane :  $\dots\dots\dots$

.....

**Remarque 1.** Les définitions de ce paragraphe s'étendent au cas d'une densité définie sur un intervalle ouvert, quitte à utiliser des limites : voir en particulier le paragraphe 3.

## 2. LOI UNIFORME $\mathcal{U}[a; b]$

### Théorème 2.

♥ Soient  $a < b$  deux réels. La fonction constante  $[a; b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{b-a}$  est une densité.

On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suivant une loi de probabilité de densité  $\frac{1}{b-a}$  suit la *loi uniforme sur  $[a; b]$*  et on note  $X \sim \mathcal{U}[a; b]$ .

On a alors, pour  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels de  $[a; b]$  :  $\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$  et  $\mathbb{E}(X) = \frac{a + b}{2}$ .

**Preuve.** la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{b-a}$  sur  $[a; b]$  est continue et positive ( $b > a$ ). De

plus,  $\int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \left[ \frac{1}{b-a} x \right]_a^b = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = 1$ . Donc  $f$  est bien une densité.

Ainsi,  $\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) = \dots\dots\dots$   
 et  $\mathbb{E}(X) = \dots\dots\dots$

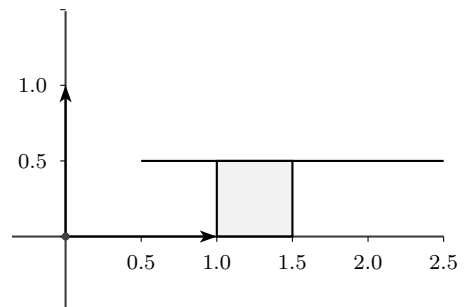
**Remarque 2.** C'est la loi suivie par la variable aléatoire égale à un nombre choisi au hasard entre  $a$  et  $b$  avec « les mêmes chances » d'obtenir chaque résultat. La calculatrice permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi  $\mathcal{U}[0; 1]$  via **NbrAléat** (menu **MATH**, sous-menu **PRB**).

**Exemple 4.** Si  $X \sim \mathcal{U}[0,5; 2,5]$ , on a :

$\mathbb{P}(1 \leq X \leq 1,5) = \dots\dots\dots$

Comment simuler  $X$  à la calculatrice ?  $\dots\dots\dots$

Comment simuler  $X \sim \mathcal{U}[a; b]$  ?  $\dots\dots\dots$



**Exemple 5.** Soit  $T$  le temps d'attente (en minutes) à un arrêt de bus, on suppose que  $T$  suit la loi uniforme sur  $[0; 15]$ .

Quelle est la probabilité que vous attendiez entre 7 et 12 minutes ?

$\dots\dots\dots$   
 $\dots\dots\dots$

**Exemple 6.** On veut modéliser la durée de vie sans panne d'un type de téléviseur par une variable aléatoire  $X$  suivant loi uniforme  $X$  sur  $[0; M]$ . On sait que 16% de ces téléviseurs tombent en panne avant leur premier anniversaire.

Calculer la valeur de  $M$  qui doit être prise, puis l'espérance de vie d'un tel téléviseur.

$\dots\dots\dots$   
 $\dots\dots\dots$   
 $\dots\dots\dots$   
 $\dots\dots\dots$

**Remarque 3.** Si  $X \sim \mathcal{U}[a; b]$ , on a  $\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$  et la médiane de  $X$  est  $\frac{a+b}{2}$ .

### 3. LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE $\mathcal{N}(0; 1)$

**Définition 4.** Une variable aléatoire  $X$ , discrète ou continue, est *centrée réduite* si son espérance est nulle et son écart-type vaut 1 :  $\mathbb{E}(X) = 0$  et  $\sigma(X) = 1$ .

#### Théorème 3.

La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$  est une densité.

On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suivant une loi de probabilité de densité  $f$  qu'elle suit la *loi normale centrée réduite*. On a en effet :  $\mathbb{E}(X) = 0$  et  $\text{Var}(X) = \sigma(X) = 1$ .

La parité de  $f$  implique  $\mathbb{P}(X \geq 0) = \mathbb{P}(X \leq 0) = 0,5$  : la médiane de  $X$  est nulle.

**Preuve.** On admet que  $f$  est une densité :  $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$  (voir TP 8).

On a :  $\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} xe^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{\alpha}^{\beta}$ . (forme  $u'e^u$  avec  $u(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ )

Or  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$  d'où  $\mathbb{E}(X) = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx = 0$ . On admet que  $\text{Var}(X) = 1$ .

**Méthode 1.**  $\triangle$  la difficulté principale de la loi centrée réduite est que l'on ne sait pas exprimer de primitive de  $f$  à l'aide des fonctions usuelles. Si  $X \sim \mathcal{N}(0; 1)$ , on estimera la probabilité  $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$  (où  $a < b$  réels), à l'aide de la fonction `normalFRép(a,b,0,1)` du menu `DISTR` de la calculatrice.

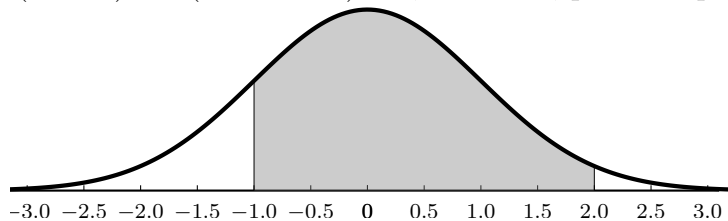
Pour estimer numériquement  $\mathbb{P}(a \leq X)$  on peut remplacer  $b$  par un nombre important (20), ou écrire  $\mathbb{P}(a \leq X) = \mathbb{P}(a \leq X \leq 0) + \mathbb{P}(0 \leq X) = \mathbb{P}(a \leq X \leq 0) + 0,5$  si  $a < 0$ , par exemple.

**Exemple 7.** Soit  $X \sim \mathcal{N}(0; 1)$ .

$\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 2) \approx \dots\dots\dots$

$\mathbb{P}(0 \leq X) = \dots\dots\dots$

$\mathbb{P}(X > 3) = \dots\dots\dots$



**Exemple 8.** Pourquoi  $\mathbb{P}(X \leq -u) = \mathbb{P}(X \geq u) = 1 - \mathbb{P}(X \leq u)$  ?  $\dots\dots\dots$

En déduire :  $\mathbb{P}(-u \leq X \leq u) = 2\mathbb{P}(X \leq u) - 1$   $\dots\dots\dots$

#### Théorème 4.

♥ Soit une variable  $X$  suivant la loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0; 1)$  et  $\alpha \in ]0; 1[$ .

Il existe un unique réel positif  $u_{\alpha}$  tel que  $\mathbb{P}(-u_{\alpha} \leq X \leq u_{\alpha}) = 1 - \alpha$ .

**Preuve.** Soit  $f : [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \mapsto \mathbb{P}(-u \leq X \leq u) = 2 \int_0^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^u \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ .

$f$  est une primitive d'une fonction strictement positive, donc est strictement croissante et continue. De plus,  $f(0) = 0$  et  $\lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = 1$ . Or pour tout  $\alpha \in ]0; 1[$ , on a :  $1 - \alpha \in ]0; 1[$ .

D'après le théorème de la bijection, il existe donc un unique  $u_{\alpha} \in [0; +\infty[$  tel que  $f(u_{\alpha}) = 1 - \alpha$ .

**Exemple 9.** Calculer  $u_{0,05}$  et  $u_{0,01}$  à  $10^{-2}$  près : utiliser l'exemple 8 et la calculatrice, `FracNormale(p,0,1)` dans `DISTR` donne  $u$  tel que  $\mathbb{P}(X \leq u) = p$ , où  $X \sim \mathcal{N}(0; 1)$ .

$\dots\dots\dots$   
 $\dots\dots\dots$

## 4. THÉORÈME DE MOIVRE-LAPLACE

### Propriété 5.

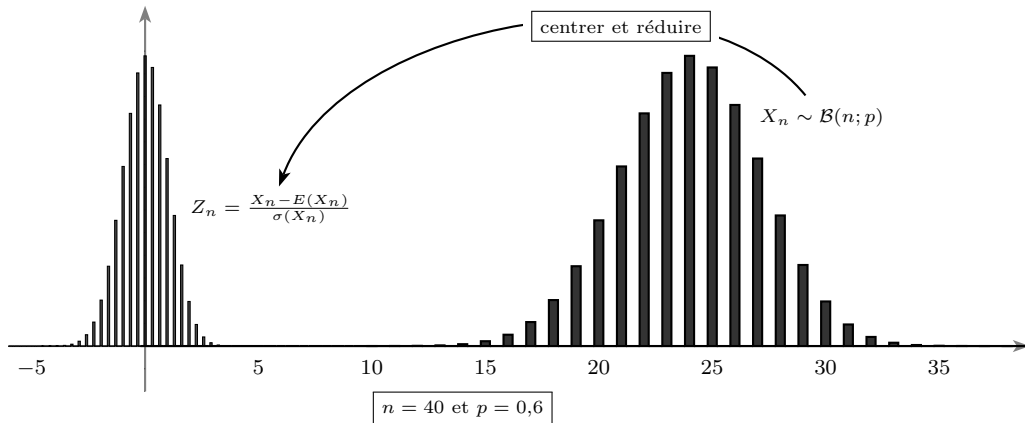
Soit  $X$  une variable aléatoire, discrète ou continue, et  $Y$  la variable aléatoire définie par  $Y = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ . Alors  $Y$  est une variable aléatoire centrée réduite :  $\mathbb{E}(Y) = 0$  et  $\sigma(Y) = 1$ .

**Remarque 4.** On admet que les propriétés de l'espérance et de la variance démontrées au chapitre 3 (exemple 8) sont encore valables pour les variables continues :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sigma}X - \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}(X)\right) = \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}(X) - \frac{\mathbb{E}(X)}{\sigma} = 0 \text{ et } \mathbb{V}\text{ar}\left(\frac{1}{\sigma}X - \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}(X)\right) = \frac{1}{\sigma^2}\mathbb{V}\text{ar}(X) = 1.$$

**Remarque 5.** Centrer-réduire une variable aléatoire qui suit la loi binomiale :  $X_n \sim \mathcal{B}(n; p)$   $n \geq 1$  entier et  $p \in ]0; 1[$ , et on sait que  $\mathbb{E}(X_n) = np$  et  $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}\text{ar}(X)} = \sqrt{np(1-p)}$ .

donc  $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$  est centrée réduite.



### Théorème 6.

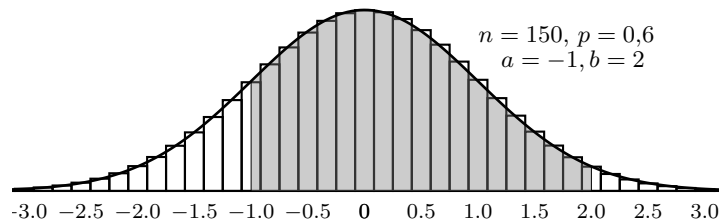
*Moivre-Laplace.* Soit  $p \in ]0; 1[$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , soit  $X_n \sim \mathcal{B}(n; p)$  et la variable aléatoire centrée réduite  $Z_n$  correspondante (voir la remarque 5).

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels,  $\alpha < \beta$ . On a

$$\mathbb{P}(\alpha \leq Z \leq \beta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(a \leq Z_n \leq b) \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(0; 1)$$

**Remarque 6.** Ce théorème signifie que, pourvu que  $n$  soit suffisamment grand, on peut estimer  $\mathbb{P}(a \leq Z_n \leq b)$  par  $\mathbb{P}(a \leq Z \leq b)$ .

Il est admis, voir le TP 8 pour une approche empirique.



**Exemple 10.** On lance indépendamment 400 fois une pièce équilibrée. On note  $X$  le nombre de résultats « face » et  $\tilde{X}$  la variable aléatoire centrée réduite correspondante.

Montrer que  $\mathbb{P}(190 \leq X \leq 220) = \mathbb{P}(-1 \leq \tilde{X} \leq 2)$ . Estimer alors  $\mathbb{P}(190 \leq X \leq 220)$  :

.....  
 .....  
 .....

5. LOIS NORMALES  $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

**Définition 5.** Une variable aléatoire  $X$  suit la loi normale de paramètres  $(\mu, \sigma^2)$  lorsque la variable aléatoire  $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$  suit la loi normale centrée réduite. On note :  $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ .  
 Si  $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0; 1)$  alors  $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

**Théorème 7.** Si  $X$  suit la loi normale de paramètres  $(\mu, \sigma^2)$  alors  $\mathbb{E}(X) = \mu$  et  $\text{Var}(X) = \sigma^2$ .

**Remarque 7.** De même que pour la loi normale centrée réduite, la densité de la loi normale n'a pas de primitive que l'on peut exprimer avec les fonctions usuelles. Si  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , une valeur approchée de  $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$  est donnée par `normalFRép(a, b, μ, σ)`.

**Exemple 11.** Soit  $k > 0$  et  $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ . Prouver  $\mathbb{P}(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) = \mathbb{P}(-k \leq Y \leq k)$  où  $Y \sim \mathcal{N}(0; 1)$  .....

.....

En déduire à 0,01 près ♥ :  $\mathbb{P}(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx$  .....

$\mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx$  .....  $\mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx$  .....

**Exemple 12.** On suppose que la variable aléatoire  $X$  associant à une vache d'un cheptel sa production laitière annuelle suit une loi normale  $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$  avec  $\mu = 6000$  et  $\sigma = 400$ .

① Quelle est la probabilité qu'une vache prélevée au hasard produise annuellement :

- (a) entre 5900 et 6100 litres?    (b) moins de 5500 litres?    (c) plus de 6250 litres?

.....  
 .....  
 .....

② Donner un intervalle centré sur  $\mu$  qui contient la production annuelle de lait d'une vache de ce cheptel avec une probabilité de 0,95.

.....  
 .....

③ Quel niveau de production annuelle de lait une vache prise au hasard dans le cheptel dépassera-t-elle avec une probabilité égale à 0,2?

.....  
 .....

**Exemple 13.** On souhaite modéliser la durée de vie d'un appareil par une variable aléatoire  $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ . Déterminer  $\mu$  et  $\sigma$  d'après les deux spécifications suivantes : 80% des appareils ont une durée de vie entre 120 et 200 jours et 5% de la production a une durée de vie inférieure à 120 jours.

.....  
 .....  
 .....

## 6. FLUCTUATIONS D'ÉCHANTILLONNAGE

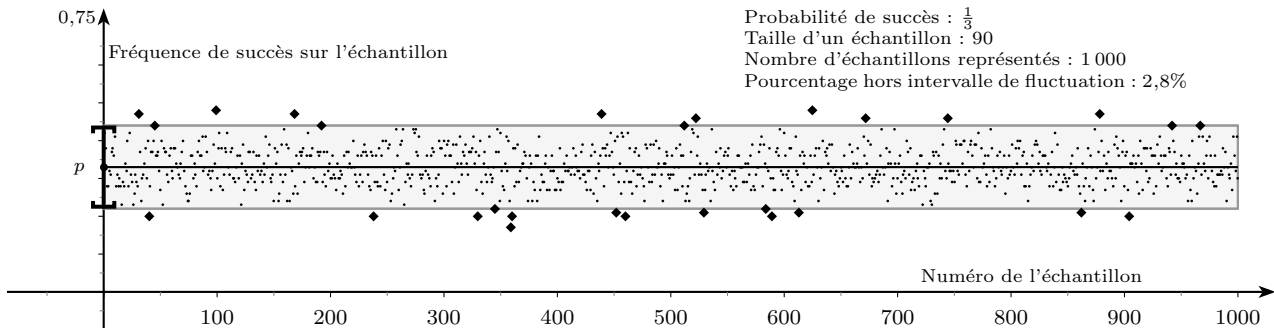
**Définition 6.** Un *échantillon* de taille  $n$  est la liste des résultats d'un schéma de Bernoulli de paramètres  $(n; p)$ . (répétition de  $n$  expériences à deux issues, de probabilité de succès  $p$ , identiques et indépendantes).

La *fréquence observée* des résultats d'un échantillon de taille  $n$  est  $f = \frac{\text{nombre de succès}}{n}$

**Remarque 8.** si  $X_n \sim \mathcal{B}(n; p)$ , la variable aléatoire égale à la fréquence est  $F_n = \frac{X_n}{n}$ .

**Définition 7.** On considère un schéma de Bernoulli de paramètres  $(n; p)$ . Un intervalle  $I$  est un *intervalle de fluctuation au seuil* de  $1 - \alpha$  si  $\mathbb{P}(F_n \in I) \geq 1 - \alpha$  : la probabilité que l'intervalle contienne la fréquence de succès d'une série d'expériences est d'au moins  $1 - \alpha$ . Lorsqu'il est centré sur  $p$ , l'intervalle est dit *centré*.

**Exemple 14.**



### Théorème 8.

♥ Pour  $n \geq 1$  entier, soit  $X_n \sim \mathcal{B}(n; p)$ . Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left( \frac{X_n}{n} \in \left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \right) = 0,95$$

L'intervalle  $I_n = \left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$  est l'*intervalle de fluctuation asymptotique*, au seuil de 0,95, et centré sur  $p$ , de la fréquence de succès d'un schéma de Bernoulli de paramètres  $(n; p)$ .

**Preuve.** On a :  $\mathbb{P}(F_n \in I_n) = \mathbb{P} \left( X_n \in \left[ np - 1,96 \sqrt{np(1-p)}; np + 1,96 \sqrt{np(1-p)} \right] \right)$  donc

$$\mathbb{P}(F_n \in I_n) = \mathbb{P} \left( \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \in [-1,96; 1,96] \right) \text{ qui tend vers } 0,95 \text{ d'après le théorème de 6.}$$

**Remarque 9.** Pour  $n \geq 30$ ,  $pn \geq 5$  et  $(1-p)n \geq 5$ , on considérera que  $\mathbb{P}(F_n \in I_n) \approx 0,95$ .

**Théorème 9.** ♥ pour  $n$  assez grand,  $\mathbb{P} \left( \frac{X_n}{n} \in \left[ p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \right) \geq 0,95$ .

**Preuve.**  $p(1-p)$  est un trinôme de maximum  $\frac{1}{4}$ , d'où  $1,96 \sqrt{p(1-p)} \leq 0,98 \leq 1$  donc  $I_n \subset \left[ p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ . D'où  $\mathbb{P} \left( \frac{X_n}{n} \in \left[ p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \right) \geq \mathbb{P}(F_n \in I_n) \geq 0,95$ . si  $n$  grand.

**Exemple 15.** Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique centré de la fréquence des résultats « 6 » pour un échantillon de 100 lancés de dés équilibrés.

## 7. INTERVALLE DE CONFIANCE

### Théorème 10.

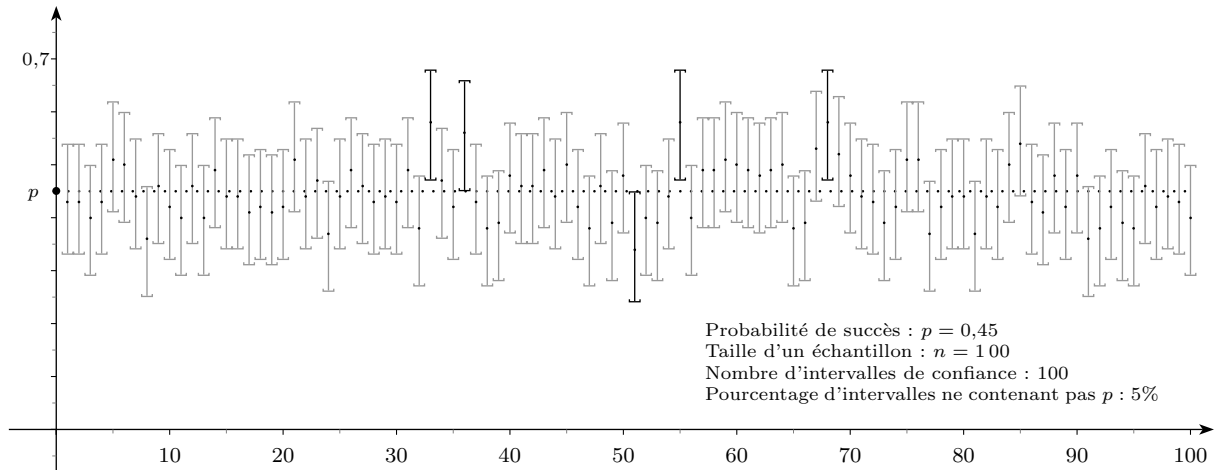
Soit  $X_n \sim \mathcal{B}(n; p)$  et  $F_n = \frac{X_n}{n}$ . Pour  $n$  assez grand,  $\mathbb{P}\left(p \in \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geq 0,95$

**Preuve.** On a :  $p \in \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \iff F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \text{ et } p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \iff F_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + p$   
 et  $p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \iff F_n \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ . Ainsi, d'après le théorème 9,  
 $\mathbb{P}\left(p \in \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) = \mathbb{P}\left(F_n \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geq 0,95$  pour  $n$  assez grand.

**Définition 8.** On la fréquence observée  $f$  des succès lors de la réalisation d'un schéma de Bernoulli de paramètres  $(n; p)$  où  $p$  est inconnu.

On dit que  $I_{95\%} = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$  est un *intervalle de confiance* au seuil de 0,95.

**Remarque 10.** Le nombre  $p$  appartiendra à 95% des intervalles de confiance ainsi obtenus.



**Exemple 16.** Avant le second tour d'une élection présidentielle, on effectue deux sondages sur des échantillons représentatifs de la population. On ne retient que les suffrages exprimés, c'est-à-dire les personnes qui ont l'intention de voter pour l'un ou l'autre des candidats.

★ le premier sondage concerne 1003 personnes qui votent à 53,1% pour le candidat A.

★ le seconde sondage concerne 9851 personnes qui votent à 51,2% pour le candidat A.

Lequel de ces sondages permet d'affirmer, au seuil de confiance de 95%, que le candidat A va l'emporter ?

.....

.....

.....

.....