Chapitre 6 : Fonction exponentielle -19-12-12-
Terminale ES-L, 2012-2013, Y. Angeli

1. Exponentielle de base q

Théorème 1.

et définition. Soit q un réel positif. On admet qu'il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ appelée *exponentielle de base* q telle que

① f est dérivable sur $\mathbb{R}$,

② pour tous x et y réels, $f(x+y) = f(x)f(y)$.

③ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = q^n$.

Par extension, on note $f(x) = q^x$ pour tout réel x.

Preuve. Le théorème est admis, le TP 4 donne des indications sur la construction de q^x.

Propriété 2.

Pour tous x, y réels et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

① $q^0 = 1$ ② $q^{x+y} = q^x \times q^y$ ③ $q^{-x} = \dfrac{1}{q^x}$

④ $q^{x-y} = \dfrac{q^x}{q^y}$ ⑤ $q^{nx} = (q^x)^n$ ⑥ $q^{\frac{x}{2}} = \sqrt{q^x}$ ⑦ $q^x > 0$

Preuve. ① est une conséquence du point ③ du théorème 1 appliqué pour $n = 0$.
② est une reformulation du point ② du théorème 1.
③ : d'après ② pour $y = -x$, on a : $1 = q^0 = q^{x-x} = q^x \times q^{-x}$ d'où $\dfrac{1}{q^x} = q^{-x}$ et donc $q^x \neq 0$.
④ $q^{x-y} \overset{②}{=\!=} q^x \times q^{-y} \overset{③}{=\!=} \dfrac{q^x}{q^y}$. Pour ⑤, on note que $(q^x)^n = q^x \times \cdots \times q^x = q^{x+\cdots+x} = q^{nx}$.
Pour les propriété ⑥ et ⑦, on remarque que $\left(q^{\frac{x}{2}}\right)^2 = q^{2\frac{x}{2}} = q^x$. Comme un carré est positif et $q^x \neq 0$, $q^x > 0$. Ainsi, $q^{\frac{x}{2}} > 0$, c'est donc la racine carrée de q^x. □

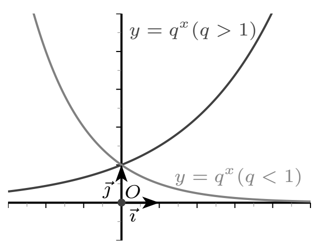
Théorème 3.

Soit $q > 0$ la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = q^x$ vérifie

① $f'(x) = f'(0) \times q^x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

② f convexe sur $\mathbb{R}$.

③ f strictement croissante si $q > 1$,
strictement décroissante si $q < 1$, et constante si $q = 1$.



Preuve. Si $x, h > 0$, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{q^{x+h} - q^x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} q^x \dfrac{q^h - 1}{h} = q^x \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = q^x f'(0)$.
Ainsi, pour x réel, $f''(x) = [f'(0)]^2\, q^x \geqslant 0$ donc f est convexe.
$f'(x)$ est du signe de $f'(0)$, donc strictement monotone ou constante.
Elle ne peut donc varier que comme la suite q^n. □

2. Fonction exponentielle

Théorème 4.

et définition. Il existe un unique $e > 0$ tel que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ vérifie $f'(0) = 1$. On a : $e \approx 2{,}718$. La fonction ainsi définie s'appelle la *fonction exponentielle.*

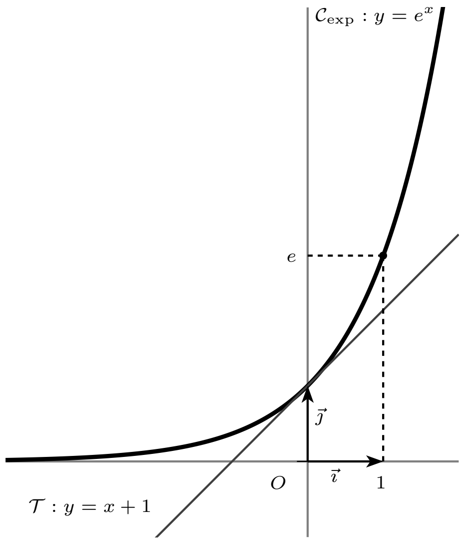
Preuve. Admis. Le TP 4 permet de ce convaincre de l'existence du nombre e.

Théorème 5.

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ pour tout x réel.

x	$-\infty$		$+\infty$
			$+\infty$
exp		$\nearrow$	
	0		

$e^0 = 1$; $e^1 = e \approx 2{,}718$



Remarque 1. La tangente $\mathcal{T}$ au point $(0\,;1)$ à la courbe $\mathcal{C}_{\exp}$ a pour équation $y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0)$ donc $y = x + 1$, $\mathcal{T}$ est sous $\mathcal{C}_{\exp}$ sauf au point de contact $(0\,;1)$.

Preuve. Par le théorème 3, point ①, la fonction exponentielle est dérivable de dérivée donnée par, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f'(0) \times e^x = e^x > 0$. Donc la fonction exponentielle est strictement croissante. La position relative de sa courbe et la tangente en A est une conséquence de la convexité (théorème 3, point ②) $\square$

Remarque 2. La fonction exponentielle de base e (ou exponentielle tout court) vérifie également la propriété 2 (pour $q = e$).

Propriété 6.

Soit u une fonction définie et dérivable sur I. Alors la fonction e^u est définie et dérivable sur I, de dérivée $u'e^u$.

Preuve. Soit $x \in I$ et h tel que $x + h \in I$ (on suppose $u(x+h) - u(x) \neq 0$ pour $h \neq 0$ petit). On a alors :

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{u(x+h)} - e^{u(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{u(x)} \times \frac{e^{u(x+h)-u(x)} - 1}{u(x+h) - u(x)} \times \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = e^{u(x)} \times u'(x)$$

car $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{e^{u(x+h)-u(x)} - 1}{u(x+h) - u(x)} = \lim_{X\to 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$ (dérivée de l'exponentielle en $x = 0$)

et $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x)$. $\square$.

Exemple 1. Calculer la dérivée de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$ ....

....

Remarque 3. Comme l'exponentielle est strictement croissante, $e^x > e^y \iff x > y$ et $e^x = e^y \iff x = y$.

Exemple 2. Résoudre $e^x - 1 = 0$ puis $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$.