Chapitre 5 : Dérivation -??-11-12-
Terminale ES-L, 2012-2013, Y. Angeli

1. Nombre dérivé

1.1. Définition

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Le *taux d'accroissement* $\tau_{x_0,h}f$ de f entre $x_0 \in I$ et $x_0+h \in I$ est $\tau_{x_0,h}f = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

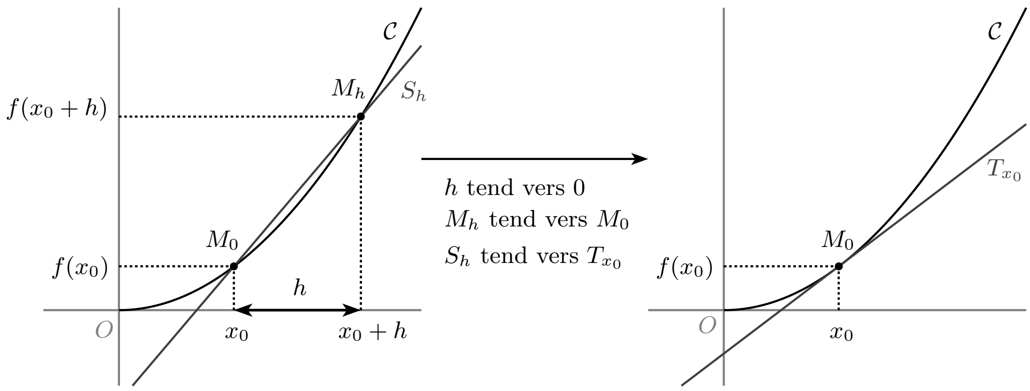
Si la limite, lorsque h tend vers 0, du taux d'accroissement $\tau_{x_0,h}$ existe, la fonction f est dite *dérivable* en x_0. Cette limite est alors appelée le *nombre dérivé* $f'(x_0)$ de f en x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Exemple 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f est $\tau_{x,h}f = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h$. La limite lorsque h tend vers 0 de $\tau_{x,h}$ est $f'(x) = 2x$.

1.2. Interprétation géométrique

Soit f une fonction définie sur I et dérivable en $x_0 \in I$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On note M_0 le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x_0 et M_h le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x_0+h. Le coefficient directeur de la sécante $S_h = (M_0M_h)$ à la courbe $\mathcal{C}$ est le taux d'accroissement $\tau_{x_0,h}f$. Lorsque h tend vers 0, la position limite de M_h est celle du point M et la position limite de la sécante S_h est la tangente T_{x_0} à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x_0. Le coefficient directeur de cette tangente est $f'(x_0)$, la limite des coefficients directeurs des sécantes.



Définition 2. Soit f une fonction définie sur I et dérivable en $x_0 \in I$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. La *tangente* à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x_0 est la droite T_{x_0} d'équation

$$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

En particulier, le coefficient directeur de cette tangente est le nombre $f'(x_0)$.

Exemple 2. Équation de la tangente à $\mathcal{P} : y = f(x)$ (où $f : x \mapsto x^2$) au point $A(1,1)$?

....

....

2. Calcul de fonctions dérivées

Lorsqu'une fonction f est dérivable en tout x d'un intervalle I, on appelle *fonction dérivée* et on note f' la fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$.

Pour calculer les dérivées de fonctions compliquées, on commence par déterminer les dérivées de fonctions usuelles (par le calcul du taux d'accroissement), et on utilise des règles de calcul sur les fonctions dérivées :

2.1. Dérivées des fonctions usuelles

Théorème 1.

$\star$ La fonction $x \mapsto ax+b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto a$. ($a, b \in \mathbb{R}$)
$\star$ La fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto nx^{n-1}$ ($n \geqslant 1$ entier).
$\star$ La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}-\{0\}$ de dérivée $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.
$\star$ La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ de dérivée $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2.2. Opérations usuelles

Théorème 2.

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I. Alors
$\star$ $u+v$ est dérivable sur I de dérivée $(u+v)' = u'+v'$.
$\star$ uv est dérivable sur I de dérivée $(uv)' = u'v+v'u$.
$\star$ ku est dérivable sur I de dérivée $(ku)' = ku'$. (où $k \in \mathbb{R}$)
$\star$ $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I privé des x tels que $v(x)=0$, de dérivée $-\frac{v'}{v^2}$.
$\star$ $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I privé des x tels que $v(x)=0$, de dérivée $\frac{u'v-v'u}{v^2}$.

Preuve. $\star$ Pour la somme, on calcule le taux d'accroissement de $(u+v)$:
$\tau_{x,h}(u+v) = \frac{u(x+h)+v(x+h)-(u(x)+v(x))}{h} = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h} = \tau_{x,h}u + \tau_{x,h}v$.
En faisant tendre h vers 0 on a bien : $(u+v)'(x) = u'(x)+v'(x)$.
$\star$ Pour le produit, on procède de même :

$$\begin{aligned}
\tau_{x,h}(u\times v)(x) &= \frac{u(x+h)\times v(x+h)-u(x)\times v(x)}{h} \\
&= \frac{u(x+h)\times v(x+h)-u(x)v(x+h)+u(x)v(x+h)-u(x)\times v(x)}{h} \\
&= \frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times v(x+h) + u(x)\times\frac{v(x+h)-v(x)}{h}
\end{aligned}$$

En faisant tendre h vers 0 on a bien : $(u\times v)'(x) = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.
$\star$ La dérivée de ku est un cas particulier de la situation précédente : $v(x)=k$ et $v'(x)=0$.
$\star$ La dérivée de $\frac{1}{v}$ est un cas particulier de composition de fonctions.
$\star$ La dérivée de $\frac{u}{v}$ s'obtient par la formule de dérivée d'un produit appliquée à $u\times\frac{1}{v}$. $\square$. $\square$

Exemple 3. Calculer la dérivée de $f :]0;+\infty[\to\mathbb{R},\ x\mapsto x\sqrt{x}$ ....
....
....

Exemple 4. Calculer la dérivee de $g : \mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{1}{x^n}$ ($n \geqslant 1$ entier). En déduire que la deuxième formule des dérivées usuelles est en fait valable pour $n \in \mathbb{Z}-\{0\}$.

3. Applications

3.1. Approximation numérique

Propriété 3.

Lorsque h est voisin de 0, la tangente à une courbe est presque confondu avec cette courbe : si f est dérivable en x, on peut écrire pour h proche de 0 : $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$.

Exemple 5. Soit h définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $h(x) = \frac{1}{x}$. Calculer $h'(1)$ et en déduire une approximation de $\frac{1}{1+h}$. Donner une approximation de $\frac{1}{1{,}001}$.

....

....

....

3.2. Variations

Théorème 4.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a\,;b[$.
- $f'(x) > 0$ sur $]a\,;b[$ (sauf en des points isolés[1]) $\iff$ f strictement croissante sur $]a\,;b[$.
- $f'(x) < 0$ sur $]a\,;b[$ (sauf en des points isolés) $\iff$ f strictement décroissante sur $]a\,;b[$.
- $f'(x) = 0$ sur $]a\,;b[$ si et seulement si f constante sur $]a\,;b[$.

Preuve. (non rigoureuse, il s'agit seulement d'une idée) :
Si $f'(x) > 0$ sur I, cela signifie que toutes les tangentes à $\mathcal{C}_f$ su r I ont des coefficients directeurs strictement positifs, donc sont strictement croissantes. Au voisinage de $x \in I$, la courbe et sa tangente étant presques identiques (propriété 3), la fonction f est également strictement croissante au voisinage de chaque $x \in I$, donc sur l'intervalle I tout entier. □

Exemple 6. Dresser le tableau de variations de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2 - x^3$

....

....

....

3.3. Lecture graphique

$\mathcal{C}$ représente $f : [-3; 5] \to \mathbb{R}$, Δ est tangente à $\mathcal{C}$ en $(2; 0)$.

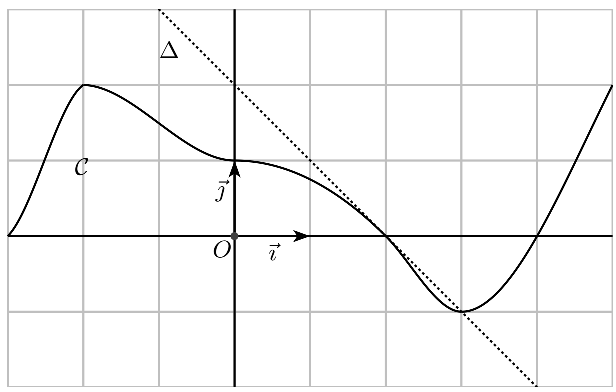
Calculer $f'(2)$. ....

....

Résoudre $f'(x) = 0$ ....

Résoudre $f'(x) \leqslant 0$ ....

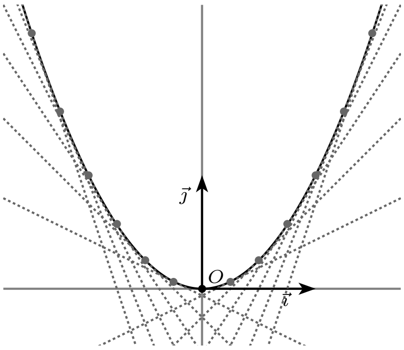
....



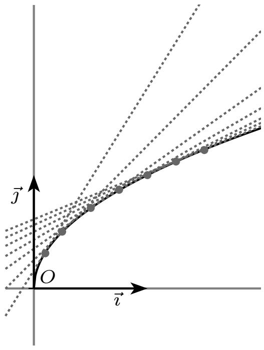
1. c'est-à-dire : on n'a pas $f'(x) = 0$ sur un intervalle ouvert contenu dans $[a, b]$

4. Convexité et concavité

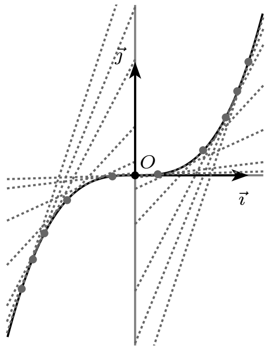
Définition 3. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, de courbe $\mathcal{C}_f$.
- $\star$ f est *convexe* sur I, si sa courbe est située au dessus de chacune de ses tangentes.
- $\star$ f est *concave* sur I, si sa courbe est située en dessous de chacune de ses tangentes.
- $\star$ le point A de la courbe $\mathcal{C}_f$ est un *point d'inflexion* si la tangente en A traverse la courbe.



La fonction carrée est convexe sur $\mathbb{R}$.



La fonction racine carrée est concave sur $]0;+\infty[$.



O est point d'inflexion de la courbe de la fonction cube.

Exemple 7. Que dire d'une fonction affine ? ....

Exemple 8. Donner l'équation de la tangente T_a à la parabole $\mathcal{P}$ de la fonction $f : x \mapsto x^2$ au point d'abscisse a. Étudier la position relative de T et $\mathcal{P}$. (identité remarquable !) ....

....

....

....

4.1. Convexité et variations de la dérivée

Théorème 5.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, de courbe $\mathcal{C}_f$.
- $\star$ f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
- $\star$ f est convexe sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.
- $\star$ le point d'abscisse a de $\mathcal{C}_f$ est un point d'inflexion si et seulement si f' admet un maximum ou un minimum en a.

Preuve. Soit $a \in I$ et $h : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$. On a $h'(x) = f'(x) - f'(a)$. Si f' est croissante, on a : $h'(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant a$ et $h'(x) \leqslant 0$ si $x \leqslant a$ donc h atteint en a son minimum $h(a) = 0$: ainsi, $h(x) \geqslant 0$ et $\mathcal{C}$ est au dessus de toute tangente : f convexe. $\square$

Exemple 9. Déduire du tableau de variations de $x \mapsto 3x^2$ la convexité de la fonction cube.

....

....

....

Propriété 6. Les propriétés suivantes sont aussi valables pour les fonctions concaves :
- $\star$ La somme de deux fonctions convexes est convexe.
- $\star$ Le produit d'une fonction convexe et d'un réel positif est une fonction convexe.
- $\star$ L'opposé d'une fonction convexe est concave.

Exemple 10. En déduire que $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est convexe si $a > 0$ et *concave* si $a < 0$.

4.2. Convexité et dérivée seconde

Définition 4. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Si sa dérivée f' est dérivable, on dit que f est deux fois dérivable et note f'' sa *dérivée seconde* (la dérivée de sa dérivée f').

Théorème 7.

Soit f une fonction définie, dérivable et de dérivée dérivable sur un intervalle I. On a :
- ⋆ f est convexe sur I si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$ sur I.
- ⋆ f est concave sur I si et seulement si $f''(x) \leqslant 0$ sur I.
- ⋆ le point d'abscisse a de $\mathcal{C}_f$ est un point d'inflexion si et seulement si $f''(a) = 0$ et change de signe.

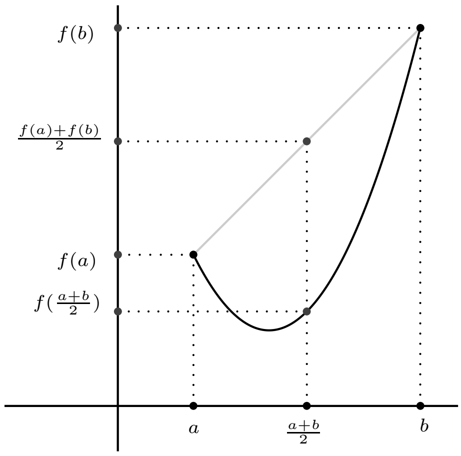
Exemple 11. Vérifier que $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $]0\,;+\infty[$. ....

....

....

....

5. Inégalité de convexité



Théorème 8.

Soit f une fonction convexe sur un intervalle $[a; b]$. Alors :
$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Remarque 1. Il existe un théorème semblable pour les fonctions concaves, qui vérifient l'inégalité de sens contraire.

Preuve. Comme f est convexe sur $[a; b]$, la courbe de f est en particulier au dessus de la tangente au point d'abscisse $\frac{a+b}{2}$: pour $x \in [a; b]$,
$$f(x) \geqslant f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
En ajoutant les inégalités obtenues pour $x = a$ et $x = b$, il vient :
$$f(a) + f(b) \geqslant 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
qu'il suffit de diviser par 2 pour obtenir l'égalité recherchée. □

Exemple 12. Démontrer que pour tout réel x, on a : $\dfrac{x^2+1}{2} \geqslant \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2$

6. Formulaire

6.1. Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Domaine de validité	Condition
k	0	$\mathbb{R}$	$k \in \mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$	
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$	$a, b \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R} : (n \geqslant 0);\ \mathbb{R} - \{0\} : (n < 0)$	$n \in \mathbb{Z} - \{0\}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$	
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$	

6.2. Opérations sur les dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel. Alors,

Fonction f	Fonction dérivée f'	Domaine de validité
$u+v$	$u'+v'$	I
uv	$u'v+v'u$	I
ku	ku'	I
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$	tout $x \in I$ tel que $v(x) \neq 0$
$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$	tout $x \in I$ tel que $v(x) \neq 0$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$	$x \in I$ tels que $u(x) > 0$
e^u	$u' \times e^u$	I