

CHAPITRE 4 : PROBABILITÉS FINIES -22-10-12-
Terminale ES-L, 2012-2013, Y. Angeli

1. VOCABULAIRE

Définition 1. Une *expérience aléatoire* est un processus dont le résultat est incertain. On appelle *univers* d'une expérience aléatoire l'ensemble Ω des *issues* possibles de l'expérience (ou *événements élémentaires*).

Dans ce chapitre, on supposera que l'univers est un ensemble fini.

Définir la *loi de probabilité* d'une expérience aléatoire dont l'univers est fini, c'est associer à chaque issue possible un nombre entre 0 et 1 (sa *probabilité*) qui représente les chances ou les risques que l'expérience aboutisse à ce résultat.

La somme des probabilités de chacune des issues possibles doit valoir 1.

Exemple 1. Lancer une pièce équilibrée est une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$. La probabilité de l'évènement élémentaire « pile » est $\mathbb{P}(\text{pile}) = 0,5$ et de même, $\mathbb{P}(\text{face}) = 0,5$. On a bien défini une loi de probabilité : $\mathbb{P}(\text{pile}) + \mathbb{P}(\text{face}) = 1$.

△ L'univers Ω n'est pas un nombre, mais un ensemble : dans l'exemple précédent, l'univers Ω est l'ensemble composé des 2 issues « pile » et « face ».

Définition 2. La loi de probabilité d'une expérience aléatoire est dite *équirépartie* si chaque évènement élémentaire a la même probabilité. Si l'univers Ω compte n issues possibles, la probabilité de chacune des issues est donc $\frac{1}{n}$.

Exemple 2. On considère l'expérience aléatoire consistant au lancer d'un dé équilibré.

Quelle indication signifie que la loi de probabilité est équirépartie?

Lister les issues qui composent l'univers de l'expérience : $\Omega = \dots\dots\dots$

Décrire la loi de probabilité de cette expérience :

Issue						
Probabilité						

1.1. ÉVÈNEMENT

Définition 3. Étant donnée une expérience aléatoire, un *évènement* A est une partie de l'univers Ω : il est donc composé d'un certain nombre d'issues possibles de l'expérience.

La probabilité d'un évènement A est le nombre noté $\mathbb{P}(A)$ qui est la somme des probabilités de chacune des issues qui composent l'évènement A . Ce nombre représente la chance ou le risque que l'évènement se produise.

Exemple 3. On reprend l'exemple 2 du dé. Soit A l'évènement « le résultat est strictement plus grand que 4 ». On note $A = \{5, 6\}$ et :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(5) + \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Soit B l'évènement « le résultat est pair ». $B = \dots\dots\dots$

$$\mathbb{P}(B) = \dots\dots\dots$$

Remarque 1. Si la loi de probabilité est équirépartie : $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre d'issues dans } A}{\text{nombre total d'issues dans } \Omega}$

2. OPÉRATIONS SUR LES ÉVÈNEMENTS

On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω et $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ deux évènements.

2.1. ÉVÈNEMENT CERTAIN, ÉVÈNEMENT IMPOSSIBLE

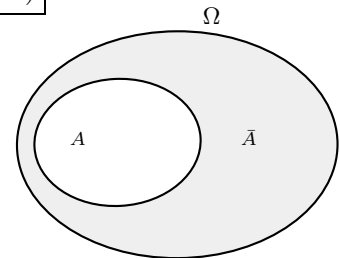
L'évènement *certain* Ω est composé de toutes les issues possibles : sa probabilité est $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
 Il est certain que cet évènement se réalise.

L'évènement *impossible* \emptyset ne contient aucune des issues possibles : sa probabilité est $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
 Il est certain que cet évènement ne se réalise pas.

2.2. ÉVÈNEMENT CONTRAIRE

L'évènement *contraire* de l'évènement A est l'évènement \bar{A} composé des toutes les issues de l'univers qui ne sont pas dans A . Sa probabilité est $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

Exemple 4. Expérience 2 (dé) avec $A = \{5, 6\}$.
 Décrire \bar{B} par une liste, par une phrase, et donner sa probabilité.



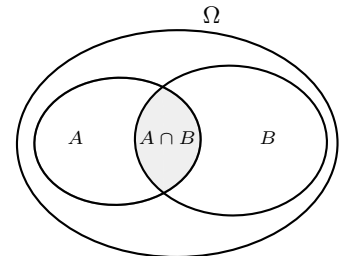
.....

 En général : $\bar{\emptyset} = \dots\dots\dots \bar{\bar{A}} = \dots\dots\dots$

2.3. INTERSECTION D'ÉVÈNEMENTS

L'*intersection* des évènements A et B est l'évènement noté $A \cap B$.
 Cet évènement est réalisé lorsque A et B sont réalisés en même temps.
 Lorsque $A \cap B = \emptyset$, A et B sont dits *incompatibles* ou *disjoints*.

Exemple 5. Expérience 2 (dé), avec $A = \{5, 6\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$.
 Décrire $A \cap B$ par une liste, une phrase et donner sa probabilité.



.....

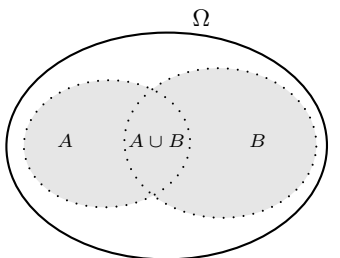
 En général : $\bar{A} \cap A = \dots\dots\dots A \cap \Omega = \dots\dots\dots A \cap \emptyset = \dots\dots\dots$

2.4. UNION D'ÉVÈNEMENTS

L'*union* des évènements A et B est l'évènement noté $A \cup B$, il est réalisé lorsque A ou B sont réalisés. (c'est-à-dire si A est réalisé ou B est réalisé ou A et B sont réalisés en même temps).
 Une *partition* de l'univers Ω est un ensemble d'évènements deux à deux incompatibles A_1, \dots, A_k tels que $A_1 \cup \dots \cup A_k = \Omega$. (recouvrement sans superposition).

On a alors : $\mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_k) = 1$.

Exemple 6. Expérience 2 (dé), avec $A = \{5, 6\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$.
 Décrire $A \cup B$ par une liste, une phrase, et donner sa probabilité.



.....

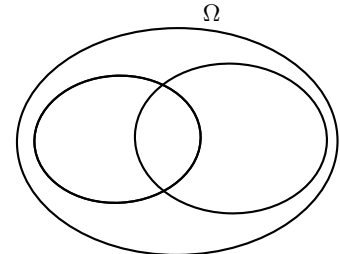
 $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = \dots\dots\dots A \cup \bar{A} = \dots\dots\dots \overline{A \cup B} = \dots\dots\dots$

Propriété 1. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

3. UN EXEMPLE

Sur 1 000 ordinateurs vendus, un marchand observe que 80 ont exigé une réparation dans la deuxième année qui a suivi l'achat (événement noté R_2) et 125 lors de la troisième année qui a suivi l'achat (R_3), dont 20 avaient déjà été réparés lors de la deuxième année.

	R_2	\bar{R}_2	Total
R_3			
\bar{R}_3			
Total			1 000



On considère l'expérience aléatoire « acheter un ordinateur à ce marchand » dont l'univers Ω est l'ensemble des 1000 ordinateurs. Compléter :

$R_2 \cap R_3$	« l'ordinateur à été réparé la seconde et la troisième année »	$\mathbb{P}(R_2 \cap R_3) =$
\bar{R}_2	$\mathbb{P}(\bar{R}_2) =$
$\bar{R}_2 \cap R_3$	$\mathbb{P}(\bar{R}_2 \cap R_3) =$
...	« l'ordinateur a subi au moins une réparation »
...	« l'ordinateur n'a subi aucune réparation »
...	« l'ordinateur a subi une seule réparation »

Sachant que l'ordinateur a été réparé la seconde année, quelle est la probabilité qu'il le soit aussi la troisième? (décrire l'univers!) Exprimer ce résultat à l'aide de $\mathbb{P}(R_2)$ et $\mathbb{P}(R_2 \cap R_3)$.

4. VARIABLE ALÉATOIRE

Définition 4. Définir une *variable aléatoire* X , c'est associer un nombre réel à chacune des issues de Ω . L'évènement « $X = k$ » est l'ensemble des issues pour lesquelles X vaut k .
 La *loi de probabilité* d'une variable aléatoire X associe à chaque valeur possible k de la variable X la probabilité de l'évènement « $X = k$ ».
 L'*espérance* de cette variable aléatoire est le nombre $\mathbb{E}(X) = \sum k \times \mathbb{P}(X = k)$.
 La *variance* de cette loi est le nombre $\text{Var}(X) = \sum (k - \mathbb{E}(X))^2 \times \mathbb{P}(X = k)$.
 L'*écart-type* est le nombre $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$.

Remarque 2. L'espérance est une moyenne. Dans le cas d'un jeu, c'est un gain moyen (ou une perte moyenne, si elle est négative). Un jeu est *équilibré* si l'espérance (de gain) est nulle.

Exemple 7. Dans l'exemple précédent : la réparation d'un ordinateur la seconde année coûte en moyenne 250€ et la réparation la troisième année coûte 350€ en moyenne. On note X la variable aléatoire qui associe à chaque ordinateur le coût moyen de ses réparations éventuelles. Quelles valeurs peut prendre X ? Présenter sa loi de probabilité sous forme d'un tableau, calculer son espérance. À quel prix le marchand doit-il fixer l'extension de garantie de un à trois ans pour espérer dégager un bénéfice de 10€ par extension vendue?

5. PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

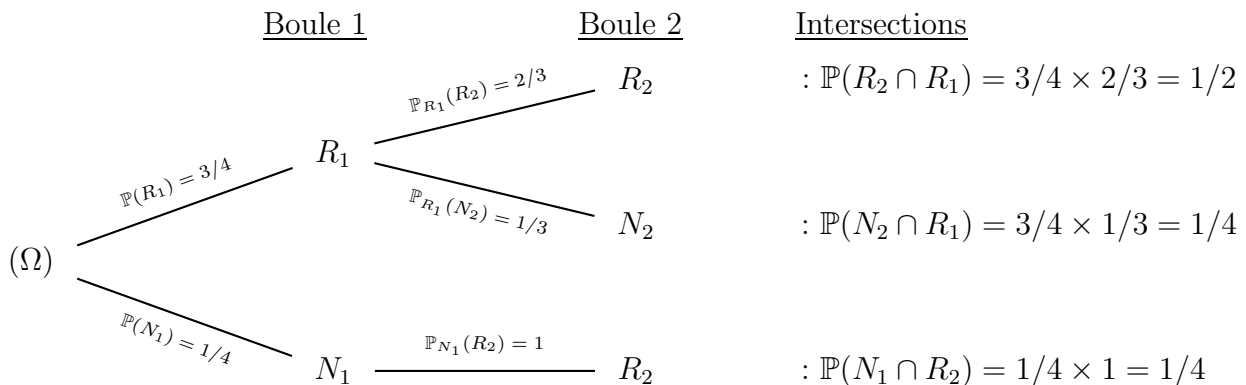
Définition 5. Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on appelle *probabilité conditionnelle* de B sachant A le nombre noté $\mathbb{P}_A(B)$, ou parfois $\mathbb{P}(B|A)$, et défini par $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$.

Ce nombre représente la probabilité de l'évènement $A \cap B$ dans l'univers A .

Arbre de choix. on modélise une situation faisant intervenir les probabilités conditionnelles par un *arbre*, se lisant de gauche à droite et constitué de *nœuds* et de *branches* :

- ★ Chaque nœud représente un évènement (le premier, souvent omis, représente l'univers).
- ★ Les branches issues d'un même nœud aboutissent à des évènements formant une partition.
- ★ Près de la branche partant du premier nœud et aboutissant à B figure $\mathbb{P}(B)$.
- ★ Près de la branche partant de A et aboutissant à B figure la probabilité $\mathbb{P}_A(B)$.

Exemple 8. On tire deux boules de suite *sans remise* dans un sac contenant 4 boules indiscernables au toucher : 3 boules rouges, et un boule noire. On note R_1 l'évènement « la première boule est rouge », N_1 l'évènement « la première boule est noire ». Les évènements R_1 et N_1 forment une partition. (ces deux situations ne peuvent survenir en même temps et couvrent toutes les possibilités). On définit de même R_2 et N_2 .



Théorème 2.

- **Loi des nœuds** : La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut toujours 1 : si $B_1 \dots B_n$ est une partition et $\mathbb{P}(A) \neq 0$ alors : $\mathbb{P}_A(B_1) + \dots + \mathbb{P}_A(B_n) = 1$
- **Intersections et arbres** : Si un chemin parcouru sur l'arbre (de gauche à droite) passe par les évènements $B_1 \dots B_n$, alors $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n)$ est le produit des probabilités associées à chacune des branches parcourues.
- **Formule des probabilités totales.** Si B_1, \dots, B_n forment une partition, la probabilité d'un évènement A est $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B_1) + \mathbb{P}(A \cap B_2) + \dots + \mathbb{P}(A \cap B_n)$.
Si aucun des B_i n'est vide : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(A) + \mathbb{P}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_2}(A) + \dots + \mathbb{P}(B_n) \times \mathbb{P}_{B_n}(A)$

Preuve. La loi des nœuds comme la formule des probabilités totales sont des conséquences du fait que $A \cap B_1 \dots A \cap B_n$ est une partition de A , la formule d'intersection vient de la définition 5 : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$. \square

Exemple 9. Dans l'exemple 8, la loi des nœuds est bien vérifiée :

$$\bullet \mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(N_1) = 3/4 + 1/4 = 1 \quad \bullet \mathbb{P}_{R_1}(R_2) + \mathbb{P}_{R_1}(N_2) = 2/3 + 1/3 = 1 \quad \bullet \mathbb{P}_{N_1}(R_2) = 1$$

D'après la formule des probabilités totales :

$$\bullet \mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(N_1 \cap R_2) = 1/2 + 1/4 = 3/4.$$

Ainsi : $\mathbb{P}_{R_2}(R_1) = \frac{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)}{\mathbb{P}(R_2)} = \frac{1/2}{3/4} = 2/3$. (on peut « retourner » l'arbre)

6. ÉVÈNEMENTS INDÉPENDANTS

Définition 6. Deux évènements A et B sont *indépendants* si et seulement si on a l'égalité $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Remarque 3. Si $A, B \neq \emptyset$ sont indépendants, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ donc $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$: que A soit réalisé n'influe pas sur la probabilité que B a de se réaliser.

⚠ Cette formule n'est utilisable que si l'on sait que A et B sont indépendants. Réciproquement, pour prouver l'indépendance de A et B , il faut calculer chacun des membres et vérifier l'égalité.

Exemple 10. Dans l'exemple 8, dire si R_1 et R_2 sont indépendants :

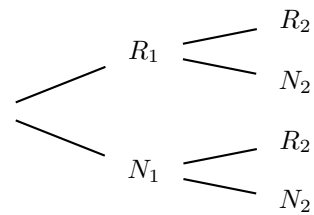
$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \dots\dots\dots \\ \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}(R_2) = \dots\dots\dots \end{array} \right\} \dots\dots\dots$$

Exemple 11. Dans l'exemple 8, pour un tirage *avec remise* :

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \dots\dots\dots \mathbb{P}(N_1 \cap R_2) = \dots\dots\dots$$

$$\mathbb{P}(R_2) = \dots\dots\dots \text{Indépendance de } R_1 \text{ et } R_2?$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \dots\dots\dots \\ \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}(R_2) = \dots\dots\dots \end{array} \right\} \dots\dots\dots$$



7. LOI DE BERNOULLI, LOI BINOMIALE

Définition 7. Une expérience aléatoire suit une loi de *de Bernoulli* si elle n'a que deux issues possibles S (succès) et \bar{S} (échec). Il suffit alors de la donnée de $p \in [0; 1]$ tel que $\mathbb{P}(S) = p$ et $\mathbb{P}(\bar{S}) = 1 - p$ pour définir la loi de probabilité de l'expérience.

Exemple 12. On considère le lancer d'un dé équilibré et on note S l'évènement : « obtenir 6 ». Donner la loi de probabilité de cette expérience : $\mathbb{P}(S) = \dots\dots\dots \mathbb{P}(\bar{S}) = \dots\dots\dots$

Définition 8. Un *schéma de Bernoulli* de paramètre n et p est une expérience consistant en la répétition indépendante de n expériences de Bernoulli identiques de probabilité de succès p . Une variable aléatoire X suit une *loi binomiale* de paramètres n et p (on note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$) si elle dénombre les succès d'un schéma de Bernoulli.

Exemple 13. Schéma de Bernoulli de paramètres $(3, p)$.

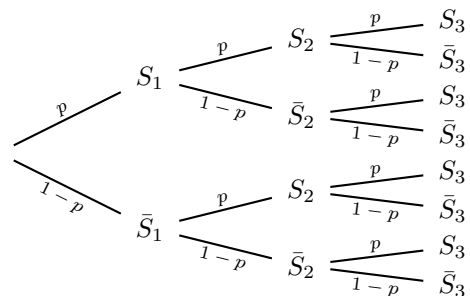
Soit X la variable aléatoire qui dénombre les succès d'une telle expérience : $X \sim \mathcal{B}(3, p)$.

$$\mathbb{P}(S_1 \cap S_2 \cap \bar{S}_3) = \mathbb{P}(S_1) \times \mathbb{P}(S_2) \times \mathbb{P}(\bar{S}_3) = p^2(1 - p).$$

$$\text{De même, } \mathbb{P}(S_1 \cap \bar{S}_2 \cap S_3) = \mathbb{P}(\bar{S}_1 \cap S_2 \cap S_3) = p^2(1 - p).$$

3 chemins de probabilités égales décrivent « $X = 2$ » :

$$\mathbb{P}(X = 2) = 3 \times p^2(1 - p). \text{ (probas totales)}$$



Exemple 14. On lance trois dés. Probabilité d'obtenir trois 6 ? $\dots\dots\dots$

Quelle est la probabilité d'obtenir 6 exactement deux fois ? $\dots\dots\dots$

Au moins deux fois ? $\dots\dots\dots$

Quelle est la probabilité d'obtenir n fois 6 sur n lancers de dés ? $\dots\dots\dots$

8. COMBINAISONS

Définition 9. Soient deux entiers $0 \leq k \leq n$. On note $\binom{n}{k}$ le nombre de possibilités de choisir k objets parmi n . Le nombre $\binom{n}{k}$ est en particulier le nombre de chemins menant à exactement k succès sur l'arbre associé à un schéma de Bernoulli de paramètres (n, p) .

Théorème 3.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p .
 Pour tout $0 \leq k \leq n$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Et : $\mathbb{E}(X) = np$ et $\text{Var}(X) = np(1-p)$

Preuve. Par indépendance des différentes expériences,

$$\mathbb{P}(S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_k \cap \bar{S}_{k+1} \cap \dots \cap \bar{S}_n) = \mathbb{P}(S_1) \times \mathbb{P}(S_2) \times \dots \times \mathbb{P}(S_k) \times \mathbb{P}(\bar{S}_{k+1}) \times \dots \times \mathbb{P}(\bar{S}_n).$$

Les expériences étant identiques, $\mathbb{P}(S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_k \cap \bar{S}_{k+1} \cap \dots \cap \bar{S}_n) = p^k (1-p)^{n-k}$.

De même, les $\binom{n}{k}$ événements composés de k succès et $n-k$ échecs ont pour probabilité $p^k (1-p)^{n-k}$. Par la formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. \square

Exemple 15. Probabilité d'obtenir exactement 2 six sur 12 dés?

Théorème 4.

Formule de Pascal. Si $0 \leq k < n$, $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4							
5							
6							

Preuve. Pour choisir $k+1$ objets parmi $n+1$, ou bien on choisit le premier et k objets parmi les n restant, ou bien on ne choisit pas le premier et on en choisit $k+1$ parmi les n restants. \square

Exemple 16. $\binom{n}{1} = \dots$. Expliquer : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Théorème 5.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}), on a : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Preuve. Lorsqu'on développe le produit de n facteurs $(a+b)^n$, le coefficient de $a^k b^{n-k}$ est le nombre de façons de choisir k facteurs a parmi les n facteurs $(a+b)^n$. \square

Exemple 17. Développer : $(1+x)^4 = \dots$

Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \dots$

Remarque 4. Pour $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. À la calculatrice, $\binom{4}{2}$ s'obtient en tapant $\boxed{4} + \boxed{\text{COMBINAISON}} + \boxed{2}$ où « combinaison » est l'option 3 du menu **Math**, sous menu **PRB**.

Exemple 18. Loi géométrique tronquée.

Lors d'un schéma de Bernoulli, la variable aléatoire Y qui vaut 0 sans succès, et le rang du premier succès sinon, suit une loi géométrique tronquée. Calculer $\mathbb{P}(Y = k)$, $\mathbb{E}(Y)$.

.....

