Chapitre 1 : Polynômes -07-09-12-
Terminale ES-L, 2012-2013, Y. Angeli

1. Rappels sur les fonctions

Définition 1. • Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ un ensemble de nombres réels. Lorsque à chaque nombre réel $x \in \mathcal{D}$ on fait correspondre un nombre réel $f(x)$, on définit une *fonction* f.
• L'ensemble $\mathcal{D}$ est l'*ensemble de définition* de la fonction f.
• Le nombre $f(x)$ est l'*image* du nombre $x \in \mathcal{D}$ par la fonction f
• Soit $a \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions x de $f(x) = a$ est l'ensemble des *antécédents* de a.
• Dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x \in \mathcal{D}$ et $y = f(x)$ est la *courbe représentative* $\mathcal{C}_f$ de la fonction f.

⚠ Ne pas confondre les notations f (une fonction), $f(x)$ (un nombre) et $\mathcal{C}_f$ (une courbe).

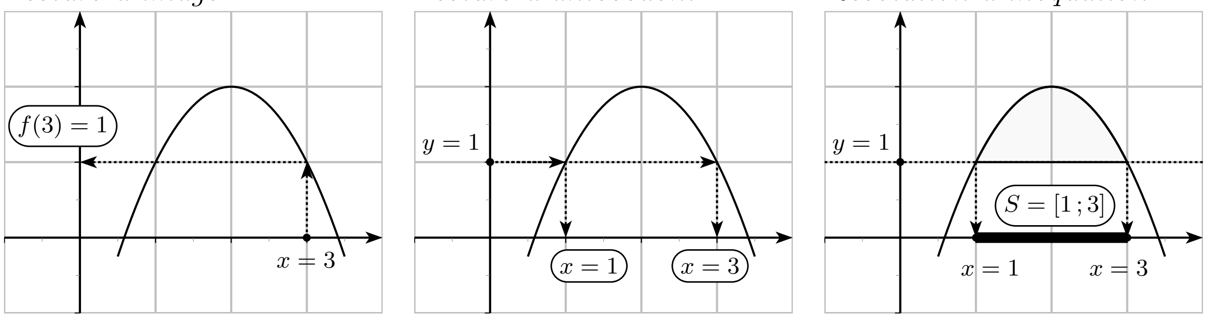
⚠ Dans l'écriture $f(x)$, la paranthèse n'a rien à voir avec un produit, en dépit de la similitude de notation ! $f(x)$ se lit : l'image du réel x par la fonction f.

Notation 1. « $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$ » se lit : f est la fonction définie sur l'ensemble $[0, +\infty[$, à valeurs dans ($\to$) $\mathbb{R}$ et qui, à tout réel $x \in [0, +\infty[$ associe ($\mapsto$) le réel $\sqrt{x}$.

1.1. Lecture graphique

On a représenté la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur [0,5 ; 2,5] :

Lecture d'image — *Lecture d'antécédent* — *Résolution d'inéquation*



L'image de 3 par f est $f(3) = 1$.

Les antécédents de 1 par f sont : $x = 1$ et $x = 3$.

L'intervalle $[1, 3]$ est l'ensemble des solutions de $f(x) \geqslant 1$

Exemple 1. $f(2) = \ldots$? Valeurs approchées des antécédents de 0 par f ? ....

1.2. Calcul

Méthode 1. *Calcul d'image* : soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -2x + 1$. Pour calculer l'image de 3 par g, il suffit de remplacer la variable x par 3 dans l'expression de g : $g(3) = -2 \times 3 + 1 = -5$.

Méthode 2. *Calcul d'antécédent* : pour déterminer l'ensemble des antécédents de 3 par g, il suffit de résoudre : $g(x) = 3 \Leftrightarrow 3 = -2x + 1 \Leftrightarrow 3 - 1 = -2x \Leftrightarrow \frac{2}{-2} = x \Leftrightarrow x = -1$.
Donc l'ensemble des antécédents de 3 par g est $\{-1\}$.

Exemple 2. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 1$. Déterminer :

• l'image de 3 par h : ....

• l'ensemble des antécédents de 3 par h : ....

....

2. Fonctions affines

Propriété 1.

Une *fonction affine* est une fonction de la forme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ sont fixés. Le nombre a est le *coefficient directeur* de f, le nombre b son *ordonnée à l'origine.*
⋆ La courbe représentative d'une fonction affine est une *droite affine.*
⋆ Si $a > 0$, la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
⋆ Si $a = 0$, la fonction est constante sur $\mathbb{R}$ (elle prend toujours la valeur b)
⋆ Si $a < 0$, la fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
⋆ Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

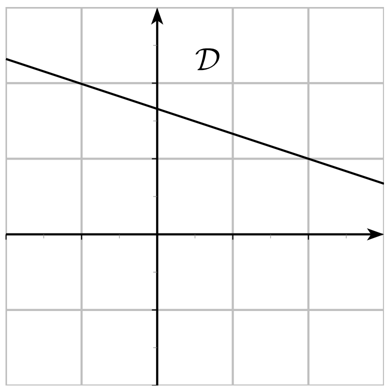
Méthode 3. *Lire l'équation réduite d'une droite.*
Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ sont deux points distincts d'une droite affine $\mathcal{D}$, le coefficient directeur de la fonction associée est

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

L'ordonnée à l'origine b s'obtient en remplaçant a, x_A, y_A dans $y_A = ax_A + b$ et en resolvant.

Méthode 4. *Tracé une droite d'équation donnée.* Pour tracer une droite d'équation $y = ax+b$, on choisit deux abscisses $x_A \neq x_B$ distinctes, et on calcule l'ordonnée des points de la droite correspondants : $y_A = ax_A + b$ et $y_B = ax_B + b$. Il ne reste plus qu'à placer les points $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et à représenter la droite (AB).

Exemple 3. ✎ Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$.



. . . .

. . . .

Donc $\mathcal{D}$ a pour équation : $y =$ . . . .

Soit $\mathcal{D}'$ d'équation $y = \dfrac{3}{2}x - 1$. Représenter $\mathcal{D}'$.

x		
y		

2.1. Signe d'une fonction affine (avec $a \neq 0$)

Propriété 2.

Soient $a \neq 0$ et b réel. Le signe de $x \mapsto ax + b$ est donné par :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		$-$signe de a	0	signe de a	

Exemple 4. Résoudre l'inéquation $(3x + 2)(2 - 5x) \leqslant 0$:

3. Trinômes

Théorème 3.

Un *trinôme du second degré à coefficients réels* est une fonction de la forme

$$P : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax^2 + bx + c \text{ où } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ sont fixés et } a \neq 0.$$

Les *racines* d'un trinôme P sont les solutions de l'équation $P(x) = 0$.
⋆ La courbe représentative d'un trinôme est une *parabole*.
⋆ Si $a > 0$, la parabole est orientée vers le haut.
⋆ Si $a < 0$ la parabole est orientée vers le bas.
⋆ Le *discriminant* du trinôme P est le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.
– si $\Delta > 0$, le trinôme a deux racines : $S = \left\{\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}; \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$.
– si $\Delta = 0$, le trinôme a une racine : $S = \left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$.
– si $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racine : $S = \varnothing$.

Exemple 5. Résoudre $x^2 + 5x + 4 = 0$ ....

....

....

Résoudre $x^2 - x + 0,25 = 0$ ....

....

....

3.1. Signe d'un trinôme

Propriété 4.

Soit $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$. Le signe de $x \mapsto x^2 + bx + c$ est donné par :

• $\Delta > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	$-$signe de a	0	signe de a	

• $\Delta = 0$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de a	

• $\Delta < 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	

Exemple 6. ✎ Résoudre $-x^2 + 3x - 2 > 0$.

4. Polynômes

Définition 2. Une fonction *polynôme* à coefficients réels est une fonction définie sur l'ensemble des réels de la forme $P : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ où n est un entier naturel et $a_0, ..., a_n$ sont des réels. Les fonctions affines et les trinômes sont des polynômes particuliers.

L'outil fondamental pour déterminer le tableau de *variations* d'une fonction est l'étude des *variations* de sa fonction dérivée. On rappelle les connaissances requises sur les dérivées pour ce chapitre :

Théorème 5.

Comme pour les autres fonctions, on obtient le sens de variation d'un polynôme P en étudiant le signe de sa **dérivée** P'. On utilisera les propriété suivantes :

① Sur un intervalle où $P'(x) < 0$ $(-)$, la fonction P est strictement décroissante ($\searrow$)

② Sur un intervalle où $P'(x) > 0$ $(+)$, la fonction P est strictement croissante ($\nearrow$)

③ La dérivée d'une fonction constante $x \mapsto k$ est nulle.

④ La dérivée de la fonction $x \mapsto x$ est la fonction $x \mapsto 1$.

⑤ La dérivée de la fonction $x \mapsto x^2$ est la fonction $x \mapsto 2x$.

⑥ La dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ est la fonction $x \mapsto nx^{n-1}$. ($n \geqslant 1$ entier).

⑦ $(k \times u)' = k \times u'$ où $k \in \mathbb{R}$ constante et u est une fonction dérivable.

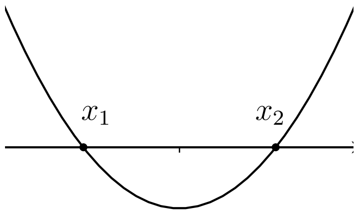
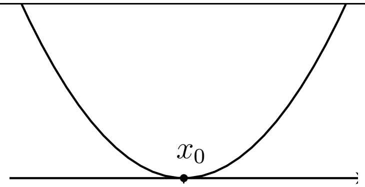
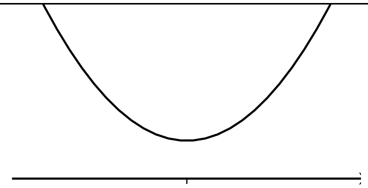
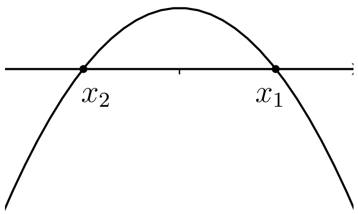
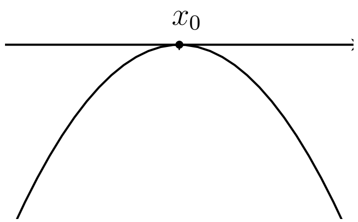
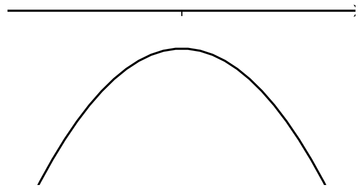
⑧ $(u + v)' = u' + v'$ où u et v sont des fonctions dérivables.

Exemple 7. ✎ Dresser le tableau de variations des fonctions

$$f : [-10\,;10] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + \frac{x}{2} + 7 \text{ et } g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 - 9x^2 + 15x + 2$$

.

Trinômes $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$:

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$	Variations
$a > 0$				$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & \frac{-b}{2a} & & +\infty \\ \hline P & +\infty & \searrow & -\frac{\Delta}{4a} & \nearrow & +\infty \end{array}$
$a < 0$				$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & \frac{-b}{2a} & & +\infty \\ \hline P & -\infty & \nearrow & -\frac{\Delta}{4a} & \searrow & -\infty \end{array}$
Racines ($P(x) = 0$)	$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0 = \dfrac{-b}{2a}$	pas de racine	
Factorisation	$a(x-x_1)(x-x_2)$	$a(x-x_0)^2$	$\varnothing$	