Contrôle commun Mathématiques Obligatoires -14-12-11-
Terminales ES, 2011-2012, Lycée Newton

Exercice 1. 5 points

Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3$.

1. Montrer que pour tout réel x, $g'(x) = 6x(x-1)$.
2. Dresser le tableau de signes de $g'(x)$ et en déduire le tableau de variations de g. (préciser les valeurs des extremums locaux, mais pas les limites)
3. Montrer que $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[1; 2]$ puis sur $\mathbb{R}$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
4. Dresser le tableau de signes de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B. Étude d'une fonction

La fonction f est définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x + 1}{x - 1}$.

1. Déterminer la limite de f en 1 et en $+\infty$.
2. Montrer que pour tout $x \in]1; +\infty[$, on a $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$
3. Déterminer le signe de $f'(x)$ puis le tableau de variations complet de f.

Exercice 2. 7 points

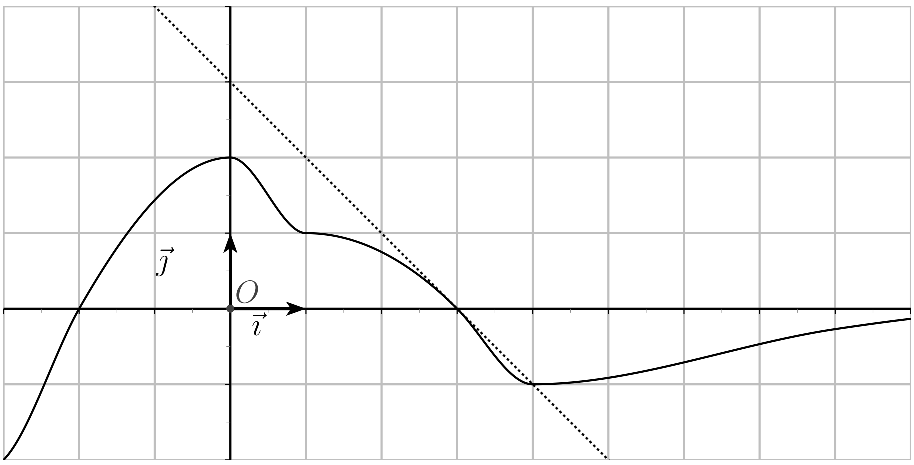
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-2x^3 + 7x}{x^2 + 1}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Asymptote :
   (a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   (b) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = ax + \dfrac{bx}{x^2 + 1}$.
   (c) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -2x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et $-\infty$.
   (d) Préciser les positions relatives de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
2. Variations :
   (a) Déterminer f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour x réel, $f'(x) = \dfrac{(x^2 + 7)(1 - 2x^2)}{(x^2 + 1)^2}$.
   (b) Déterminer le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations complet de f.
3. Déterminer une équation de $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}$ au point O.
4. Trouver, par le calcul, les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses.
5. Représenter $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$ sur l'annexe à rendre.

Exercice 3. 3 points

On a représenté la courbe $\mathcal{C}$ représentative d'une fonction g définie et dérivable sur $[-3; +\infty[$.
On sait que :

⋆ la droite en pointillé est tangente à $\mathcal{C}$ en $(3; 0)$.
⋆ La fonction g est strictement croissante sur $[9; +\infty[$.
⋆ La courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses comme asymptote.



Sauf indication contraire, les réponses ne nécessitent pas d'être justifiées.

1. Donner $g(-2)$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
2. Donner l'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) < 0$.
3. Donner $g'(3)$ (en justifiant).
4. Dresser le tableau de variations de g. En déduire le tableau de signes de $g'(x)$.

EXERCICE 4. 5 points

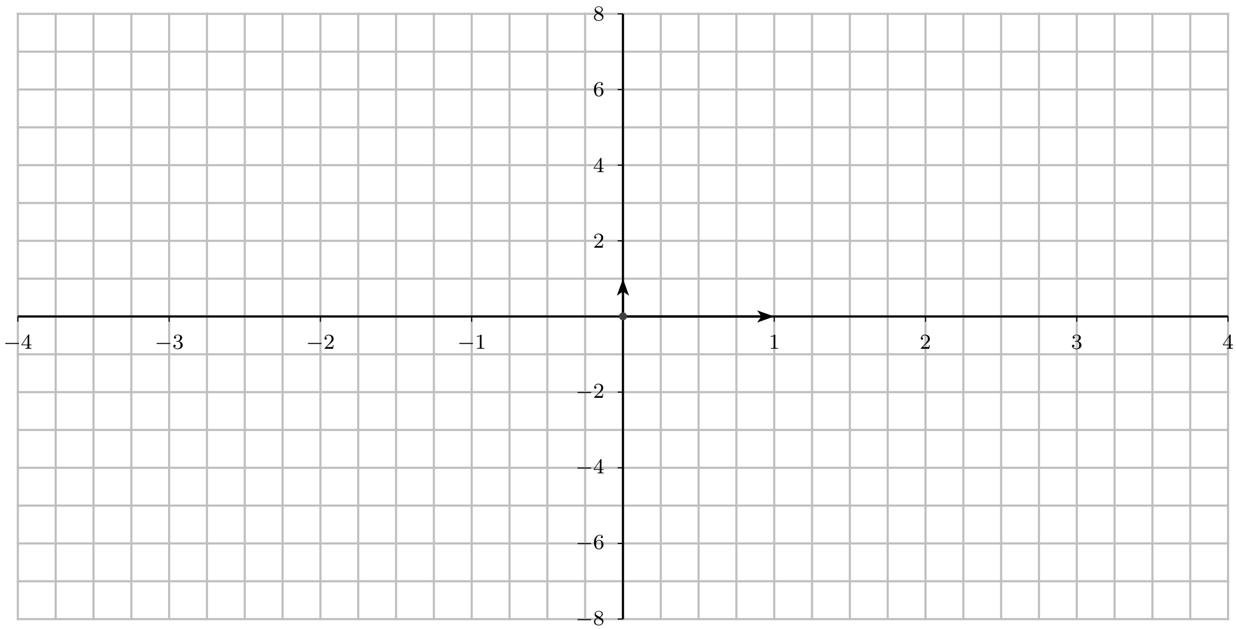
La tableau suivant donne le PNB (en € par habitant) ainsi que le nombre d'hôpitaux (pour 1 million d'habitants) dans quelques pays européens :

Pays	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
X = PNB (en € par habitant)	5 100	7 800	11 200	15 800	20 100	22 500	26 200	28 900
Y = nombre d'hôpitaux par million d'habitants	620	1 080	1 550	2 100	3 000	3 250	3 800	4 200

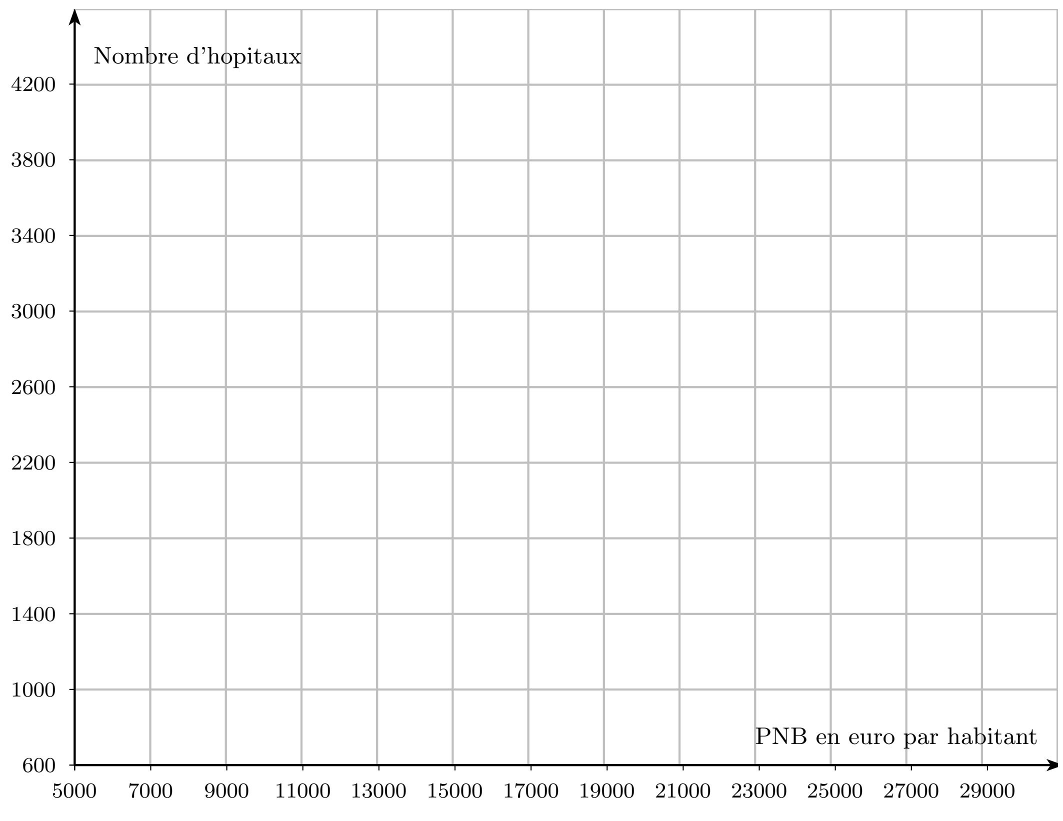
1. Représenter le nuage de points sur le graphique en annexe. D'après l'allure du nuage un ajustement affine est-il justifié ?
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points. Représenter G.
3. *Droite de* MAYER
   Dans cette question, on considère deux sous-nuages : celui constitué des points correspondants aux pays P_1, P_2, P_3 et P_4 et celui constitué des points P_5, P_6, P_7 et P_8.
   (a) Calculer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 des deux sous-nuages.
   (b) Démontrer qu'une équation de la droite (G_1G_2), où les coefficients sont arrondis à 10^{-2}, est : $y = 0,15x - 159$. Représenter G_1, G_2 et (G_1G_2).
   (c) Compléter le tableau de l'annexe à rendre.
   En déduire la somme des résidus quadratiques S associée à la droite de MAYER.
4. *Par les moindres carrés*
   Déterminer une équation de la droite de régression $\mathcal{D}$ de y en x par la méthode des moindres carrés. La représenter sur le graphique.
5. La somme des résidus quadratiques S' associée à $\mathcal{D}$ est $S' \approx 35\,482,50$. Laquelle des deux droites réalise-t-elle le meilleur ajustement affine ?
6. *Estimations*
   À l'aide de l'équation de $\mathcal{D}$ et en détaillant les calculs répondre aux questions suivantes :
   (a) Un pays a un PNB de 23 400 € par habitant. Quelle estimation peut-on faire du nombre d'hôpitaux par million d'habitants dans ce pays ? (*Arrondir à l'unité*)
   (b) Un pays a 3 500 hôpitaux par million d'habitants. À combien peut-on estimer son PNB en € par habitant ? (*Arrondir à l'unité*)

Nom :

Annexe de l'exercice 2.



Annexe de l'exercice 3.



X	5 100	7 800	11 200	15 800	20 100	22 500	26 200	28 900
Y	620	1 080	1 550	2 100	3 000	3 250	3 800	4 200
$[Y-(0,15X-159)]^2$								

Contrôle commun Mathématiques Spécialité -14-12-11-
Terminales ES, 2011-2012, Lycée Newton

Exercice 1. 5 points

La société Vélibre, spécialisée dans la location de vélos, a été créée en janvier 2010 avec un parc de 150 vélos neufs.

Afin de conserver un parc de bonne qualité, le directeur de la société a décidé :

- de racheter 40 vélos neufs en janvier de chaque année ;
- de revendre 20 :% des vélos en janvier 2011 et en janvier 2012 ;
- de revendre 20 :% au moins des vélos les plus usagés en janvier de chaque année suivante.

1. Pour tout nombre entier naturel n, on modélise le nombre approximatif de vélos du parc en janvier de l'année $2010+n$ par les termes de la suite (U_n) définie pour tout nombre entier naturel n par
$$U_{n+1} = 0,8U_n + 40 \text{ et } U_0 = 150$$
Vérifier que U_1 et U_2 correspondent bien au nombre prévu de vélos du parc pour janvier 2011 et janvier 2012.

2. Pour connaître l'évolution du nombre approximatif de vélos du parc, le directeur utilise un tableur. Voici un extrait de sa feuille de calcul :

	A	B	C	D	E
1	Valeur de n	Valeur de Un		Valeur de n	Valeur de Un
2	0	150		18	199,10
3	1	160		19	199,28
4	2	168		20	199,42
5	3	174,4		21	199,54
6	4	179,52		22	199,63
7	5	183,62		23	199,7
8	6	186,89		24	199,76
9	7	189,51		25	199,81
10	8	191,61		26	199,85
11	9	193,29		27	199,88
12	10	194,63		28	199,9
13	11	195,71		29	199,92
14	12	196,56		30	199,94

   (a) Conjecturer le sens de variation de la suite (U_n).

   (b) Quelle semble être la limite de la suite (U_n) ?

3. Pour tout nombre entier naturel n, on pose $V_n = U_n - 200$.

   (a) Prouver que la suite (V_n) est géométrique de raison $0,8$. Déterminer son premier terme.

   (b) En déduire, pour tout nombre entier naturel n, l'expression de V_n puis celle de U_n en fonction du nombre entier n.

   (c) Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a :
$$U_{n+1} - U_n = 10 \times 0,8^n$$

   (d) En déduire le sens de variation de la suite (U_n).

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
La municipalité prévoit d'implanter de nouvelles bornes dans la ville afin d'offrir aux usagers 250 emplacements. La société Vélibre pourra-t-elle satisfaire cette demande ? Argumenter la réponse.