Feuille d'exercices 25 : Révisions A 15-05-12- Terminale ES 2, 2011-2012, Y. Angeli

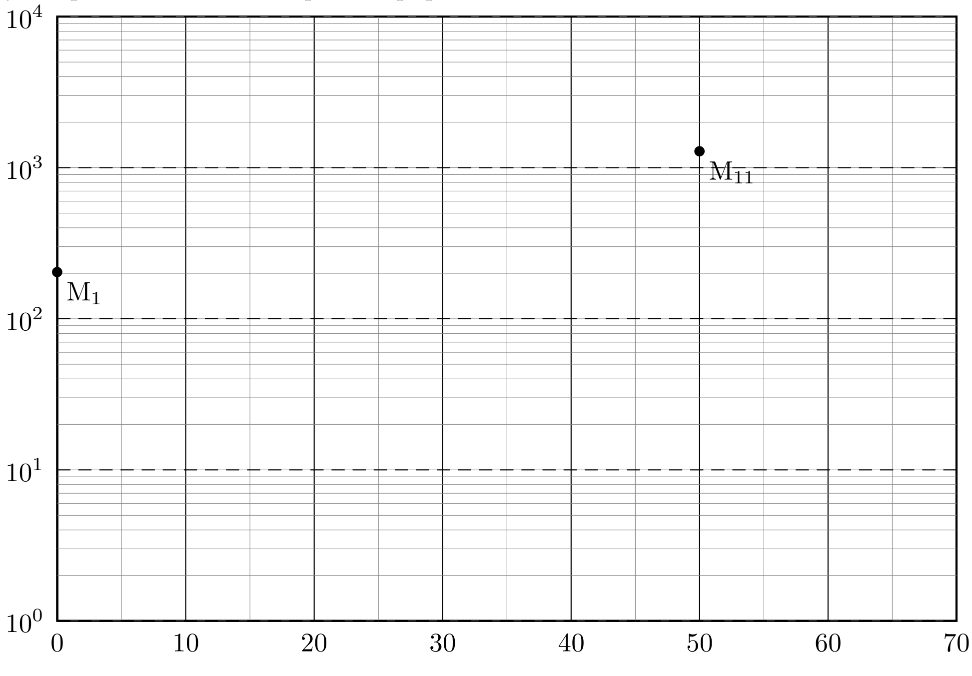
Exercice 1. Amérique du Sud novembre 2005 : 5 points

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de personnes âgées de plus de 85 ans, en France métropolitaine, de 1950 à 2000.
On note X_i l'année. L'indice i varie de 1 à 11. Par commodité on pose $x_i = X_i - 1950$.
y_i désigne, en milliers, le nombre de personnes âgées de 85 ans ou plus, au 1^er^ janvier de l'année X_i.

X_i	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
x_i	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
y_i	201	231	290	361	423	498	567	684	874	1 079	1 267
$z_i = \ln(y_i)$											

Source : Insee, bilan démographique. Champ : France métropolitaine.

1. Estimation à l'aide d'un graphique semi-logarithmique
   (a) Compléter le nuage de points $M_i\,(x_i\ ;\ y_i)$ associé à cette série statistique dans le repère semi-logarithmique fourni en annexe.
   (b) Construire sur ce graphique la droite passant par les points $\mathrm{M}_1(0\ ;\ 201)$ et $\mathrm{M}_{11}(50\ ;\ 1\,267)$ et justifier que l'ajustement du nuage à l'aide de cette droite est satisfaisant.
   (c) En supposant que cet ajustement affine reste pertinent, déterminer graphiquement à partir de quelle année le nombre de personnes âgées de plus de 85 ans dépassera 2 millions.
2. La forme du nuage obtenu avec la représentation logarithmique invite à chercher un ajustement exponentiel. On pose $z = \ln y$.
   (a) Compléter la dernière ligne du tableau. Arrondir les résultats au millième.
   (b) En utilisant la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement de z en x. Les coefficients seront arrondis au millième.
   (c) En déduire une modélisation de y en fonction de x sous la forme
   $y = A\mathrm{e}^{Bx}$. (Le réel A sera arrondi à l'unité et le réel B au millième)
3. On admet que la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,70]$ par : $f(x) = 200\mathrm{e}^{0{,}037x}$ modélise de façon satisfaisante l'évolution de cette population.
   (a) Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 2\,000$ et interpréter ce résultat.
   (b) Calculer la valeur décimale approchée arrondie au millième de $\dfrac{1}{50}\displaystyle\int_0^{50} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   Que représente ce résultat pour la population ?



EXERCICE 2. Amérique du Nord juin 2006 : 5 points

Pour chaque question, une seule des trois réponses est exacte. On demande d'indiquer la réponse exacte en cochant sans justification la grille réponse jointe en annexe. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte 0,5 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 point *; l'absence de réponse donne* 0 *point. Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à* 0.

Questions		Réponses		
Q1	Si $a \in]0~;~1[$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x$ est égale à :	0	$+\infty$	$-\infty$
Q2	Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x\text{e}^{x^2}$ est :	$x \mapsto \text{e}^{x^2}$	$x \mapsto 2\text{e}^{x^2}$	$x \mapsto \frac{1}{2}\text{e}^{x^2}$
Q3	La dérivée sur $]0~;~+\infty[$ de la fonction $x \mapsto x \ln x$ est :	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x$	$x \mapsto \ln x + 1$
Q4	$\text{e}^{-2\ln 5}$ est égal à :	$\frac{1}{25}$	-25	$\frac{5}{2}$
Q5	L'équation $\text{e}^x = \frac{16}{\text{e}^x}$ admet sur $\mathbb{R}$	Aucune solution	Une solution	Deux solutions
Q6	L'ensemble des solutions de l'inéquation $x\ln(0,2) - 5 \geqslant 0$ est :	$\left[\frac{5}{\ln 0,2}~;~0\right[$	$\left]-\infty~;~\frac{5}{\ln 0,2}\right]$	$\left[\frac{5}{\ln 0,2}~;~+\infty\right[$

Dans les questions 7, 8, 9 et 10, A et B sont deux évènements d'un univers tels que $P(\text{A}) = 0,4$, $P(\text{B}) = 0,3$ et $P(\text{A} \cap \text{B}) = 0,2$.

Q7	$P(\text{A} \cup \text{B}) =$	0,1	0,5	0,7
Q8	$P\left(\text{A} \cap \overline{\text{B}}\right) =$	0,1	0,2	0,4
Q9	$P\left(\overline{\text{A} \cap \text{B}}\right) =$	0,3	0,5	0,8
Q10	$P_{\text{A}}(\text{B}) =$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

EXERCICE 3. Réunion septembre 2006 : 3 points

Chaque question ci-dessous comporte trois réponses possibles. Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. Cocher cette réponse sur la feuille fournie en ANNEXE 1, à rendre avec la copie.
Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,5 *point.*
L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

1. Augmenter une quantité de 8 %, puis la diminuer de 8 % c'est :
   ☐ revenir à la quantité initiale
   ☐ augmenter la quantité initiale de 0,64 %
   ☐ diminuer la quantité initiale de 0,64 %
2. Le relevé des ventes de chaussures d'homme dans un magasin, en fonction des pointures, est le suivant :

Pointure	40	41	42	43	44	45	46
Nombre de paires vendues	10	12	15	13	5	5	1

   La médiane de cette série est égale à :
   ☐ 13 ☐ 42 ☐ 43
3. Pour tout nombre réel a strictement positif, le nombre $\ln\left(a^2 + 3a\right)$ est égal à
   ☐ $\ln\left(a^2\right) + 3\ln(a)$
   ☐ $\ln(a) + \ln(a+3)$
   ☐ $2\ln(a) + \ln(3a)$

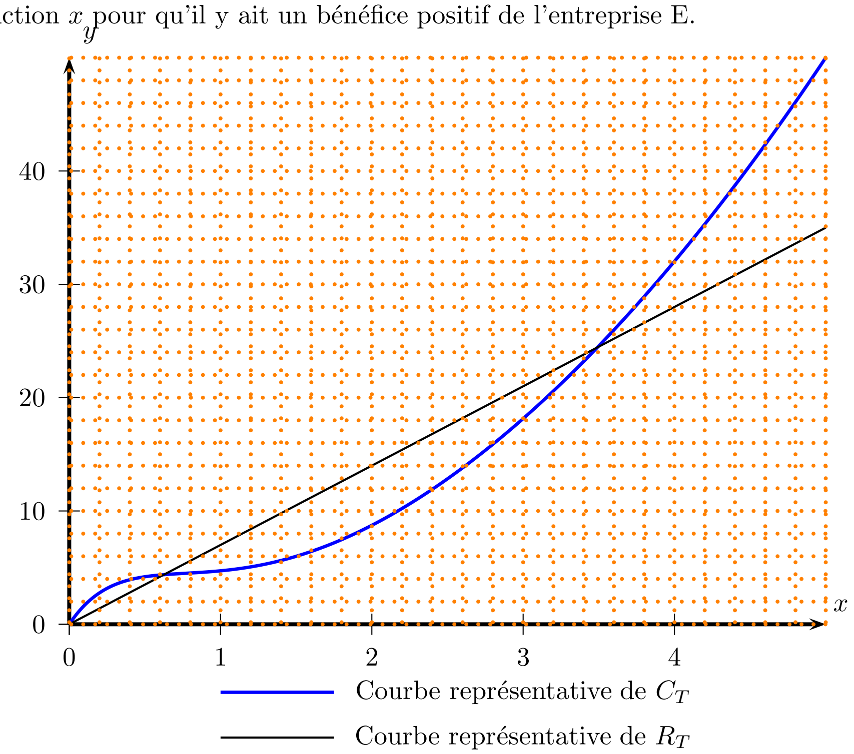
Exercice 4. Centres étranger juin 2007 : 7 points

On s'intéresse à la production mensuelle d'une certaine catégories d'articles par une entreprise E. On sait que le nombre d'articles produits par mois est compris entre 0 et 500. On suppose que le coût marginal, exprimé en milliers d'euros, peut être modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;\,5]$ par

$$C(x) = 4x + (1-2x)\mathrm{e}^{-2x+3}$$

où x représente le nombre de centaines d'articles fabriqués.

1. On sait que la fonction coût total, notée C_T, est la primitive de la fonction C sur $[0\,;\,5]$ qui s'annule pour $x = 0$.
   Justifier que $C_T(x) = 2x^2 + x\mathrm{e}^{-2x+3}$.
2. La fonction coût moyen, notée C_M est la fonction définie sur $]0\,;\,5]$ par :
   $$C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x}.$$
   Donner une expression de $C_M(x)$, en fonction de x.
3. (a) Déterminer $C'_M(x)$ où C'_M désigne la fonction dérivée de C_M.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $1 - \mathrm{e}^{-2x+3} = 0$.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $1 - \mathrm{e}^{-2x+3} > 0$.
   (d) En déduire le sens de variations de C_M sur $]0\,;\,5]$.
4. Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal et quel est ce coût en euros ?
5. Chaque centaine d'articles est vendue 7000 €. La recette totale pour x centaines d'articles est donnée, en admettant que toute la production soit vendue, par $R_T(x) = 7x$ en milliers d'euros.
   Le bénéfice est donc défini par $B(x) = R_T(x) - C_T(x)$.
   (a) En **annexe 2** sont représentées les fonctions C_T et R_T.
   Par lecture graphique déterminer :
      ⋆ le coût moyen minimal,
      ⋆ l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour qu'il y ait un bénéfice positif de l'entreprise E,
      ⋆ la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
   On fera apparaître les constructions nécessaires.
   (b) Avec l'aide de votre calculatrice, affiner l'intervalle (à un article près) dans lequel doit se situer la production x pour qu'il y ait un bénéfice positif de l'entreprise E.



EXERCICE 5. Centres étrangers juin 2007 : 5 points

Partie A

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\mathrm{e}^{-x^2+3}\right)$ est égale à :	☐ $+\infty$
	☐ 0
	☐ e^3
2. $\mathrm{e}^{\ln(2)} + \mathrm{e} - 4$ est égal à :	☐ $\mathrm{e} - 2$
	☐ $\ln(2) + \mathrm{e} - 4$
	☐ -2
3. $\ln(1 - x) \geqslant 1$ est équivalente à :	☐ $x \leqslant 1 - \mathrm{e}$
	☐ $x < 0$
	☐ $x > -\mathrm{e}$
4. La fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + 2$ a pour primitive la fonction F définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :	☐ $F(x) = x\ln(x)$
	☐ $F(x) = x\ln(x) - x$
	☐ $F(x) = x\ln(x) + x$

Partie B

5. $P\left(\overline{\mathrm{A}}\right)$ est égale à :	☐ $(1-a)(1+a)$
	☐ $a^2 - 1$
	☐ $b^2 - a^2$
6. $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ est égale à :	☐ $(a+b)^2$
	☐ $(a-b)^2$
	☐ $a^2 + b^2$
7. $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ est égale à :	☐ $\dfrac{a}{2b}$
	☐ $\dfrac{2b}{a}$
	☐ $\dfrac{2a}{b}$

Partie C

Soit $(U_n)_{n \geqslant 0}$, la suite géométrique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison $\dfrac{1}{2}$. Alors,

8. U_{n+1} est égale à :	☐ $U_n + \dfrac{1}{2}$
	☐ $\dfrac{1}{2}U_n$
	☐ $(U_n)^{\frac{1}{2}}$
9. U_n est égale à :	☐ $2 + \dfrac{1}{2}n$
	☐ $2^{(1-n)}$
	☐ $2^{(n+1)}$
10. $U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4$ est égale à :	☐ $\dfrac{31}{8}$
	☐ 15
	☐ $\dfrac{15}{8}$