

FEUILLE D'EXERCICES 21 : EXPONENTIELLE 02-05-12-
Terminale ES 2, 2011-2012, Y. Angeli

EXERCICE 1. Pondichery 17 avril 2012; 6 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = (-4x^2 + 5)e^{-x} + 3$

On note (\mathcal{C}) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1. (a) Démontrer que pour tout réel x de $[0 ; +\infty[$, on a : $f'(x) = (4x^2 - 8x - 5)e^{-x}$.
 (b) Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. (a) Démontrer que pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) = -\frac{4x^2}{e^x} + \frac{5}{e^x} + 3$.
 (b) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$ (on pourra utiliser le résultat suivant : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$).
 (c) Interpréter graphiquement cette limite.
3. À l'aide des questions 1. et 2., dresser le tableau de variation de la fonction f .
4. Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
 Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.

Partie B

Une entreprise produit de la peinture qu'elle vend ensuite. Toute la production est vendue. Le coût moyen unitaire de cette production peut être modélisé par la fonction f de la partie A :

pour x hectolitres de peinture fabriqués (avec $x \in [0, 5 ; 8]$), le nombre $f(x)$ désigne le coût moyen unitaire de production par hectolitre de peinture, exprimé en centaines d'euros (on rappelle qu'un hectolitre est égal à 100 litres).

Dans la suite de l'exercice, on utilise ce modèle. On pourra utiliser les résultats de la partie A.

Chaque réponse sera justifiée.

1. Déterminer le coût moyen unitaire de production en euros, arrondi à l'euro près, pour une production de 500 litres de peinture.
2. (a) Combien de litres de peinture l'entreprise doit-elle produire pour minimiser le coût moyen unitaire de production ? Quel est alors ce coût, arrondi à l'euro près ?
 (b) Le prix de vente d'un hectolitre de peinture est fixé à 100euros. À l'aide de la question précédente, déterminer si l'entreprise peut réaliser des bénéfices.

Pour cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

3. Le prix de vente d'un hectolitre de peinture est fixé à 300 euros.
 On appelle seuil de rentabilité la quantité à partir de laquelle la production est rentable, c'est-à-dire qu'elle permet à l'entreprise de réaliser un bénéfice. Quel est le seuil de rentabilité pour cette entreprise ?

EXERCICE 2. Extrait de Pondichery avril 2012

Anna a créé un site web. Le tableau ci-dessous présente l'évolution du nombre hebdomadaire de visiteurs de ce site au cours des huit premières semaines suivant sa création.

En remarquant que l'augmentation du nombre de visiteurs est plus faible sur les dernières semaines, on peut penser à faire un ajustement de type « logarithmique ». Pour cela, on pose : $z = \ln(x)$.

1. Dans le tableau suivant, préciser les valeurs manquantes z_3 et z_6 en arrondissant les résultats à 10^{-3} près.

Rang de la semaine x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$z_i = \ln(x_i)$	0	0,693		1,386	1,609		1,946	2,079
Nombre de visiteurs y_i	205	252	327	349	412	423	441	472

2. Donner l'équation de la droite (d) d'ajustement affine de y en z , obtenue par la méthode des moindres carrés, en arrondissant les coefficients à l'unité.
 En utilisant ce résultat, estimer le nombre de visiteurs lors de la dixième semaine (arrondir à l'unité).
3. À l'aide de ce nouvel ajustement, déterminer le rang de la semaine au cours de laquelle le nombre prévisible de visiteurs dépassera 600.