Feuille d'exercices 21 : Exponentielle 05-04-12-
Terminale ES 2, 2011-2012, Y. Angeli

Partie A. Définition de la fonction exponentielle

1. Rappeler sans le justifier le tableau de variations complet de la fonction logarithme.
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe a et b réels tels que
$$\ln(a) < x < \ln(b)$$
3. Démontrer que l'équation $\ln(y) = x$ admet une solution unique sur $[a; b]$, puis sur $]0; +\infty[$. On note cette solution e^x.
4. Que peut-on dire du signe de e^x ? Que valent e^0, e^1 ?

Ainsi, e^x est l'unique nombre réel tel que $\ln(e^x) = x$.
On appelle fonction exponentielle la fonction définie sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$. On note parfois $e^x = \exp(x)$.

Partie B. Propritétés algébriques.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$. (on pourra calculer les logarithmes de chacun des deux membres et montrer qu'ils sont égaux).
2. Montrer que pour tous $x, y > 0$, $e^{x+y} = e^x \times e^y$. (même méthode)
3. Montrer que pour tous $x, y > 0$, $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.
4. Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $(e^x)^n = e^{nx}$.

Partie C. Étude de la fonction exponentielle.

1. On admet que la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Dériver de deux manières la fonction f définie par $f(x) = \ln(e^x)$. En déduire que la fonction exponentielle est sa propre dérivée.
2. En déduire le sens de variations de la fonction exponentielle.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0.
4. Étudier la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x - (x + 1)$.
   En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$.
5. En déduire la limite de l'exponentielle en $+\infty$.
6. Déduire de la partie B : $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ et finalement que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.