Feuille d'exercices 16 : Logarithmes 07-03-12- Terminale ES 2, 2011-2012, Y. Angeli

On rappelle que l'euro est la nouvelle monnaie en usage en France. (*c'est le sujet Asie juin 2002 :-)*

Le but est d'étudier le coût marginal et le coût total de production d'un produit dans une entreprise.

L'objet de la **partie A** est de déterminer une fonction h satisfaisant à des conditions données.

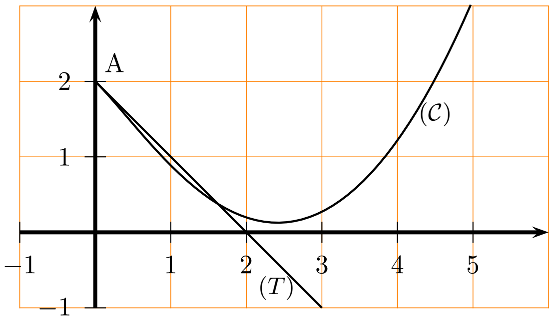
L'objet de la **partie B** est l'étude de propriétés d'une fonction f.

L'objet de la **partie C** est d'utiliser la **partie A** afin de répondre à des questions économiques.

Partie A

La courbe $(\mathcal{C})$, donnée ci-dessous, est la courbe représentative d'une fonction h définie sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Le point A a pour coordonnées $(0\,;\,2)$. La droite (T) est tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A.



1. Préciser $h(0)$.
   Déterminer à l'aide d'une lecture graphique le nombre dérivé $h'(0)$. (Justifier la réponse).
2. La fonction h, définie sur $[0;+\infty[$ est de la forme : $h(x) = ax^2 + bx + c + 2\ln(x+1)$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.
   On note h' la dérivée de la fonction h. Exprimer $h'(x)$ en fonction de a et b.
3. On donne $h'(3) = \dfrac{1}{2}$. En utilisant ce résultat et la question **1** déterminer chacune des valeurs a, b et c.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathrm{I} = [0\ ;\ 5]$ par : $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 3x + 2 + 2\ln(x+1)$.

1. (a) Calculer la dérivée f' de la fonction f.
   (b) Montrer que pour tout x de l'intervalle I : $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{x+1}$.
   (c) Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle I.
   (d) En déduire les variations de f sur $[0\,;\,5]$.
2. Soit g la fonction définie sur I par : $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$.
   (a) Calculer la dérivée de la fonction g.
   (b) En déduire une primitive de la fonction f sur I.
   (c) Calculer la valeur exacte, puis la valeur approchée à 10^{-3} près, de l'intégrale $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie C

Sur l'intervalle [0 ;5], la fonction f de la partie précédente représente le coût marginal de productioi un liquide conditionné en flacons d'un litre, en fonction de la quantité produite.

On rappelle que le coût marginal de production est assimilé à la dérivée du coût total.

$x \in [0;5]$ représente le volume en milliers de litres, et $f(x)$ représente le coût marginal en milliers d'euros.

1. Quel est le coût marginal en euros, du 3000ᵉ litre produit ?
2. Pour quelle quantité produite le coût marginal est-il minimum ? (donner la valeur au litre près).
3. Les coûts fixes sont de 1000 euros.
   (a) Montrer, en utilisant le résultat de la **partie B**, question **2. b**, que le coût total est donné par l'expression définie sur $[0\,;\,5]$ par : $C(x) = \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2(x+1)\ln(x+1) + 1$.
   (b) Calculer $C(5) - C(0)$ à un euro près et interpréter en termes de coût cette différence.
   Comparer ce résultat à celui à la **partie B** question **2. c** et expliquer cette réponse.