Feuille d'exercices 12 : Introduction du Logarithme -25-01-12-
Terminale ES 2, 2011-2012, Y. Angeli

Problème. *Introducation au Logarithme Neprien*

On note ln et on appelle *logarithme néperien* la primitive de la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$ telle que $\ln(1) = 0$.

1. Définition. Encadrement de $\ln 2$
   (a) Justifier l'existence de ln par un théorème du cours sur les primitives.
   (b) Montrer que $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt$.
   (c) Encadrer $\dfrac{1}{t}$ pour $t \in [1;2]$. Déduire un encadrement de $\ln 2$.
2. Quelle est la dérivée de ln ? Quel est le sens de variation de ln ?
3. Relation fondamentale et conséquences
   (a) Soit $y > 0$ et $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(yx) - \ln(y) - \ln(x)$. Calculer $f(1)$.
   (b) Calculer la dérivée de f. Que vaut la fonction f sur $]0;+\infty[$?
   (c) En déduire que pour tous $x, y > 0$, $\ln(y \times x) = \ln(y) + \ln(x)$
   (d) Appliquer la relation à $x > 0$ et $y = \dfrac{1}{x}$. En déduire que $\ln\dfrac{1}{x} = -\ln x$.
   (e) À l'aide de la relation, montrer que $\ln\dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$ pour $x, y > 0$.
   (f) Montrer par récurrence que $\ln(x^n) = n\ln x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Limites
   (a) Pour $x > 0$, on note $n(x)$ le nombre de chiffres avant la virgule dans l'écriture de x. Que vaut $n(2010,0127)$? Quel est le plus petit nombre à n chiffres avant la virgule ? En déduire $x \geqslant 10^{n(x)-1}$.
   (b) Montrer que $\ln(x) \geqslant (n(x)-1)\ln(10) \geqslant n(x) - 1$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)$.
   (c) Des la questions 4.b et 3.d, déduire $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x)$. Interprétation ?
5. Nombre e
6. Écrire $\ln 4$ en fonction de $\ln 2$. En déduire $\ln 4 > 1$.
7. Démontrer que l'équation $\ln(x) = 1$ admet une solution unique e sur l'intervalle $]2;4[$
8. Que vaut $\ln(e^n)$? $\ln\dfrac{1}{e}$?