Devoir Maison 7 : pour le -04-11-11-
Terminale ES 2 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1

Soit g la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^3 + x^2 - \dfrac{x}{3} + 1$.

1. Étudier la limite de g en $+\infty$, puis la limite de g en $-\infty$.
2. Calculer la dérivée g' de g.
3. Préciser le signe de g', en déduire le tableau de variation de g.
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0, 3[$.
5. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
6. Combien de solutions $g(x) = 0$ admet-elle sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Exercice 2

Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R} - \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{2 - 2x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Trouver trois réels a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{2 - 2x}$.
2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote horizontale ? Si oui, préciser son équation.
3. Calculer $\lim\limits_{x \to 1, x > 1} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1, x < 1} f(x)$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote verticale ? Si oui, préciser son équation.
4. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$.
5. Étudier le signe de $f(x) + \dfrac{1}{2}x - 1$. En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de son asymptote $\mathcal{D}$.
6. Montrer que l'expression de la dérivée f' de f est $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{2(1 - x)^2}$.
7. En déduire le tableau de variation de la fonction f.
8. Donner les valeurs approchées de f à 10^{-1} près en x =-2 ;-1 ;0 ;0,5 ;1,5 ;2 ;3 ;4.
9. Tracer soigneusement les asymptotes, puis la courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère gradué de -4 à 6 en abscisse, de -6 à 6 en ordonnée, et d'unité 1 cm.