Durée : 3 heures

∽ Baccalauréat ES Antilles–Guyane septembre 2008 ∽

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une boîte de chocolats contient 50 % de chocolats au lait, 30 % de chocolats noirs et 20 % de chocolats blancs. Tous les chocolats de la boîte sont de même forme et d'emballage identique.

Ils sont garnis soit de praliné soit de caramel et, parmi les chocolats au lait, 56 % sont garnis de praliné.

On choisit au hasard un chocolat de la boîte. On suppose que tous les choix sont équiprobables.

On note :

- L : l'évènement « le chocolat choisi est au lait » ;
- N : l'évènement « le chocolat choisi est noir » ;
- B : l'évènement « le chocolat choisi est blanc » ;
- A : l'évènement « le chocolat choisi est garni de praliné » ;
- $\overline{\text{A}}$: l'évènement « le chocolat choisi est garni de caramel ».

Tous les résultats seront donnés sous forme décimale.

1. Traduire les données du problème à l'aide d'un arbre de probabilité.
2. Donner la probabilité que le chocolat choisi soit garni de praliné sachant que c'est un chocolat au lait.
3. Déterminer la probabilité que le chocolat choisi soit au lait et garni de praliné.
4. Dans la boîte, 21 % des chocolats sont noirs et garnis de praliné.

   Montrer que la probabilité que le chocolat choisi soit garni de praliné, sachant que c'est un chocolat noir, est égale à 0,7.
5. Dans la boîte, 60 % des chocolats sont garnis de praliné.
   a. Déterminer la probabilité que le chocolat choisi soit blanc et garni de praliné.
   b. En déduire la probabilité que le chocolat choisi soit garni de praliné sachant que c'est un chocolat blanc.
6. On dispose de deux boîtes de chocolats identiques à celle décrite précédemment. Une personne prend au hasard un chocolat dans la première boîte, puis un chocolat dans la deuxième boîte (les tirages sont indépendants).

   Déterminer la probabilité de l'évènement : « l'un des chocolats choisi est garni de praliné et l'autre est garni de caramel ».

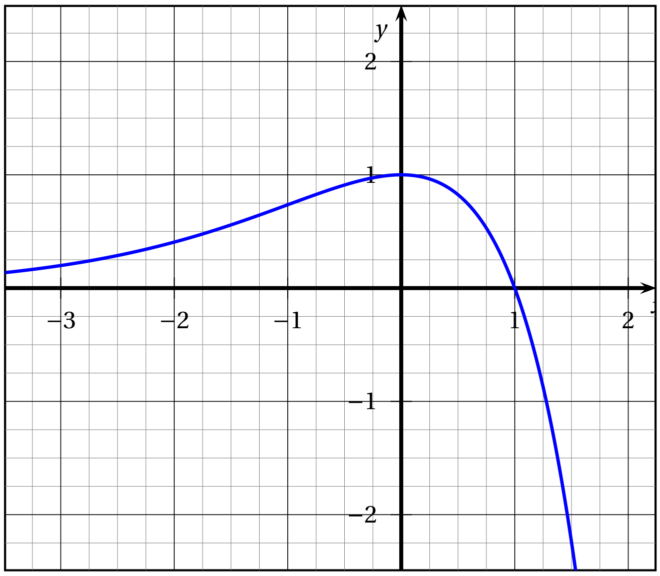
EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = (1 - x)\text{e}^{x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (*figure ci-dessous*).



Partie A

1. Calculer la limite de f en $-\infty$ (on rappelle que $\lim\limits_{x \to -\infty} x\text{e}^{x} = 0$).
   Interpréter graphiquement le résultat.
2. Calculer la limite de f en $+\infty$.
3. Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x.

Partie B

Soit F la fonction définie pour tout réel x par

$$F(x) = (-x+2)\text{e}^{x}.$$

1. Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. On appelle $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 0$.
   a. Justifier l'égalité : $\mathscr{A} = \displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\text{d}x$.
   b. À l'aide du graphique ci-dessus, justifier que : $0 < \displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\text{d}x < 1$.
   c. Déterminer, en unités d'aire, la valeur exacte de $\mathscr{A}$ puis sa valeur décimale arrondie au centième.

EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une association caritative a constaté que, chaque année, 20 % des donateurs de l'année précédente ne renouvelaient pas leur don mais que, chaque année, 300 nouveaux donateurs effectuaient un don.
On étudie l'évolution du nombre de donateurs au fil des années.
Lors de la première année de l'étude, l'association comptait 1 000 donateurs.
On note u_n le nombre de donateurs lors de la n-ième année ; on a donc $u_1 = 1\,000$.

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_{n+1} = 0,8 \times u_n + 300$.

3. Dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm pour 100 (on prendra l'origine du repère en bas à gauche de la feuille), représenter les droites d'équation $y = x$ et $y = 0,8x + 300$.

   À l'aide d'une construction graphique, émettre une conjecture sur le comportement de la suite (u_n) quand n tend vers l'infini.
4. Afin de démontrer cette conjecture, on introduit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel non nul n, par $v_n = 1500 - u_n$.
   - **a.** Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
   - **b.** Calculer la limite de (v_n) ; en déduire la limite de (u_n).

     Que peut-on en déduire pour l'évolution du nombre de donateurs de l'association ?

EXERCICE 3 **5 points**

Commun il tous les candidats

Le tableau ci-dessous indique le nombre y d'exploitations agricoles en France entre 1955 et 2005.

On appelle x le rang de l'année.

Année	1955	1970	1988	2000	2005
Rang x_i	0	15	33	45	50
Nombre d'exploitations y_i (en milliers)	2280	1 588	1 017	664	545

(Source INSEE)

Partie A : un ajustement affine

1. **a.** Tracer le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ associé à cette série statistique dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques : 1 cm pour 5 années sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 200 milliers d'exploitations sur l'axe des ordonnées ; (*on placera l'origine du repère en bas à gauche de la feuille*).

   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage et placer G sur le graphique.
2. **a.** À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement D de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés (*les coefficients seront arrondis à l'unité*).

   b. Tracer la droite D sur le graphique.
3. Calculer le nombre d'exploitations agricoles que l'on peut prévoir pour 2008 en utilisant cet ajustement (*le résultat sera arrondi au millier*).

Partie B : une autre estimation

1. Déterminer le pourcentage de diminution du nombre d'exploitations agricoles entre 2000 et 2005 (*le résultat sera arrondi au dixième*).
2. On suppose qu'entre 2000 et 2005, le pourcentage annuel de diminution du nombre d'exploitations agricoles est constant.

   Vérifier que ce pourcentage est environ de 3,87 %.
3. On suppose que le pourcentage annuel de diminution reste constant et est égal à 3,87 % entre 2005 et 2008.

   Quel est le nombre d'exploitations agricoles que l'on peut prévoir en 2008 (*le résultat sera arrondi au millier*) ?

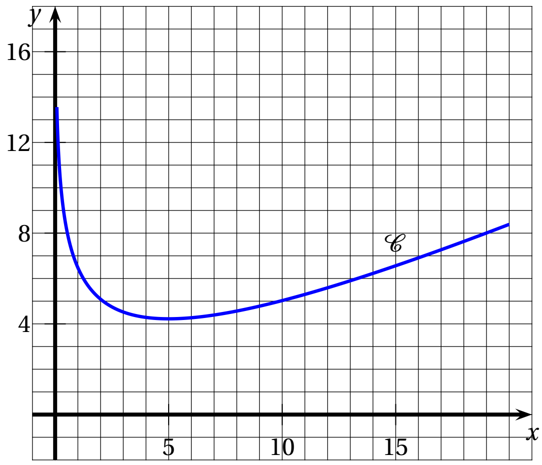
EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,20]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 4 + \frac{3}{4}\ln(4x+10) - 3\ln x.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe ci-dessous représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal.



Partie A

1. Déterminer la limite de f en 0. Quelle interprétation graphique peut-on en donner ?
2. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,20]$,
$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x(2x+5)}.$$
3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,20]$ et dresser son tableau de variations.

On admet que l'équation $f(x) = 6$ possède exactement deux solutions α et β dans l'intervalle $]0\,;\,20]$ telles que $\alpha \approx 1,242$ et $\beta \approx 13,311$.

Partie B

Une entreprise produit au maximum 20 000 objets par jour.
On note x le nombre de milliers d'objets produits chaque jour travaillé : $x \in]0\,;\,20]$.
On admet que le coût moyen de fabrication, exprimé en euros, d'un objet est égal à $f(x)$, où f est la fonction définie ci-dessus.

1. **a.** Pour combien d'objets produits le coût moyen de fabrication est-il minimal ?

   b. Déterminer ce coût moyen minimal, arrondi au centime.
2. Le prix de vente d'un objet est de 6 €. Pour quelles productions journalières l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?
3. Déterminer le bénéfice journalier, arrondi à la centaine d'euros, pour une production de 5 000 objets par jour.
4. L'année suivante, le coût moyen augmente de 2 %. Le prix de vente est alors augmenté de 2 %. Le bénéfice journalier reste-t-il identique ? Justifier.

   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.