Contrôle 9 : Probabilités -13-04-12-
Terminale ES 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1.

Un chalutier se rend sur sa zone de pêche. La probabilité qu'un banc de poissons soit sur cette zone est de $0,7$. Le chalutier est équipé d'un sonar pour détecter la présence d'un banc de poissons. Si un banc est présent, le sonar indique la présence du banc dans 80 % des cas. S'il n'y pas de banc de poissons dans la zone de pêche, le sonar indique néanmoins la présence d'un banc dans 5 % des cas.
On note :

- ⋆ B l'évènement : « il y a un banc de poissons sur zone » et $\overline{B}$ l'évènement contraire de B,
- ⋆ S l'évènement : « le sonar indique l'existence d'un banc de poissons » et $\overline{S}$ l'évènement contraire de S.

1. Donner la probabilité qu'un banc de poisson ne soit pas sur la zone de pêche puis donner $p_{\bar{B}}(S)$ et décrire en français ce que représente cette probabilité.
2. Modéliser la situation par un arbre pondéré.
3. Décrire en français l'évènement $B \cap S$ et calculer sa probabilité.
4. Montrer que la probabilité que le sonar indique la présence d'un banc de poissons (réel ou fictif) est $0,575$.
5. Lorsque le sonar détecte un banc de poisson, quelle est la probabilité qu'il y en ait réellement un ? (*arrondir le résultat au millième*)
6. Lors d'une sortie en mer, le pêcheur se trouve toujours dans l'une des trois situations suivantes :
   - ⋆ *Situation 1* : un banc de poissons est présent sur la zone et le sonar le détecte. Le filet est lancé et la pêche est fructueuse. Dans ce cas le pêcheur gagne 2000 euros.
   - ⋆ *Situation 2* : il n'y a pas de banc de poissons sur zone mais le sonar en signale un. Le filet est lancé pour rien. Dans ce cas le pêcheur perd 500 euros.
   - ⋆ *Situation 3* : le sonar ne détecte aucun banc de poisson (qu'il y en ait ou pas). Le filet n'est pas lancé et le bateau rentre au port à vide. Dans ce cas le pêcheur perd 300 euros.

   (a) Reproduire et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité du « gain »(positif ou négatif) réalisé.

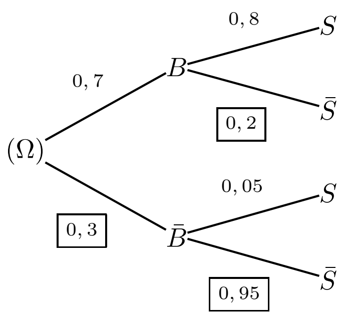
Gain : x_i	2000	-500	-300
Probabilité : p_i			

   (b) Le pêcheur effectue de nombreuses sorties. Quel gain par sortie peut-il espérer avoir ?
7. Le pêcheur prévoit d'effectuer trois sorties successives (considérees comme indépendantes) sur la zone de pêche. Déterminer la probabilité que, pour les trois sorties, le sonar reste muet, c'est-à-dire n'indique pas la présence d'un banc de poissons. *On donnera la valeur approchée arrondie au millième de ce résultat.*
8. Soit n un nombre entier naturel. Montrer que la probabilité que, lors de n sorties indépendantes, le sonar indique au moins un banc de poisson, est de $1 - 0,425^n$.
9. À partir de combien de sorties le pêcheur a-t-il au moins 99,9% de chances d'avoir au moins un signal sur son sonar ?

Corrigé du contrôle 9 -13-04-12- Terminale ES 2, 2011-2012, Y. Angeli

1. $p(B) = 0,7$ (« la probabilité qu'un banc de poisson soit sur cette zone est de 0,7 ») : $\boxed{p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 0,3}$.
$\boxed{p_{\bar{B}}(S) = \frac{5}{100} = 0,05}$ (« s'il n'y a pas de banc dans la zone de pêche, le sonar indique néanmoins la présence d'un banc dans 5% des cas »).

2. Les probabilités encadrées sont obtenues par la loi des nøuds, les autres viennent de l'énoncé. Les compléments à côtés sont ajoutés lors des questions suivantes.



: $p(B \cap S) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$ (+2000€)

: $p(B \cap S) = 0,7 \times 0,2 = 0,14$ (- 300€)

: $p(\bar{B} \cap S) = 0,3 \times 0,05 = 0,015$ (-500€)

: $p(\bar{B} \cap \bar{S}) = 0,3 \times 0,95 = 0,275$ (-300€)

3. L'évènement $B \cap S$ est : « il y a un banc de poisson sur la zone de pêche, **et** il est détécté par le sonar ».
$p(B \cap S) = p(B) \times p_B(S) = 0,8 \times 0,7 = 0,56$. Donc $\boxed{p(B \cap S) = 0,56}$

4. D'après la formule des probabilités totales,
$p(S) = p(B \cap S) + p(\bar{B} \cap S) = 0,56 + p(\bar{B}) \times p_{\bar{B}}(S) = 0,56 + 0,3 \times 0,05 = 0,575$ donc $\boxed{p(S) = 0,575}$

5. $p_S(B) = \dfrac{p(B \cap S)}{p(S)} = \dfrac{0,56}{0,575} \approx 0,974$. donc $\boxed{p_S(B) \approx 0,974}$

6a. On note G le gain algébrique obtenu :
$p(G = 2000) = p(B \cap S) = 0,56$; $p(G = -500) = p(\bar{B} \cap S) = 0,015$ et $p(G = -300) = p(\bar{S}) = 1 - p(S) = 0,44$.
Donc :

Gain : x_i	2000	-500	-300
Probabilité : p_i	0,56	0,015	0,425

6b. L'espérance de G donne le gain moyen par sortie pour un grand nombre de sorties :
$\mathbb{E}(G) = 2000 \times 0,56 + (-500) \times 0,015 + (-300) \times 0,425 = 985$: $\boxed{\mathbb{E}(G) = 985€}$
Le gain par sortie que le pêcheur peut espérer est de 985 euros.

7. L'expérience suit une loi binomiale :

$$\begin{array}{rcll} p(\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2 \cap \bar{S}_3) & = & p(\bar{S}_1) \times p(\bar{S}_2) \times p(\bar{S}_3) & \text{car les expériences sont indépendantes.} \\ & = & p(S)^3 & \text{car les expériences sont identiques.} \\ & = & 0,085 & \end{array}$$

Donc la probabilité que le sonar n'indique aucun banc lors de trois sorties est d'environ $\boxed{0,077}$

8. Soit E l'évènement : « au moins un banc de poisson est détécté sur les n sorties ».
$\bar{E}$ est l'évènement : « aucun banc n'est détécté lors des n sorties »
Ainsi : $p(E) = 1 - p(\bar{E}) = 1 - p(\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2 \cap \cdots \cap \bar{S}_n) = 1 - p(\bar{S})^n = 1 - 0,425^n$.
La probabilité de détecter au moins un banc de poisson en n sorties est $\boxed{1 - 0,425^n}$

9. $p(E) > 0,999 \iff 1 - 0,425^n > 0,999 \iff 1 - 0,999 > 0,425^n \iff \ln(0,001) > \ln(0,425^n) \iff$
$\ln(0,001) > n \ln(0,425) \iff \dfrac{\ln(0,001)}{\ln(0,425)} < n$ (le sens de l'inégalité change car $\ln(0,425) < 0$)
Or $\dfrac{\ln(0,001)}{\ln(0,425)} \approx 8,07$ donc <u>à partir de 9 sorties, le sonar a 99,9% de chances de signaler un banc de poisson.</u>