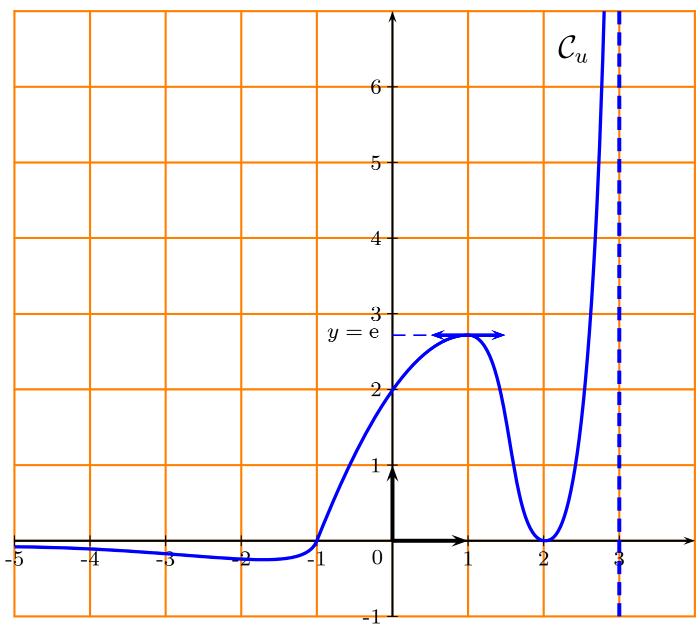
MATHÉMATIQUES OBLIGATOIRES -15-03-12-
Bac blanc TES, 2011-2012, Lycée Newton

EXERCICE 1. Commun à tous **4 points**

Soit u une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 3[$.
On note u' la dérivée de u.
On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_u$ représentant la fonction u.
L'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 3$ sont deux asymptotes à $\mathcal{C}_u$.
La droite d'équation $y = \mathrm{e}$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_u$ en son point d'abscisse 1.
La courbe $\mathcal{C}_u$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -1 et lui est tangente au point d'abscisse 2.



Cet exercice est un « Vrai-Faux ». Voici huit affirmations. Pour chacune d'entre elles, indiquer si elle est vraie ou fausse. On ne demande aucune justification.
Chaque bonne réponse apporte $0,5$ *point.*

1. (a) $u'(1) = \mathrm{e}$.
   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = 0$.
   (c) $\lim\limits_{x\to 3} u(x) = +\infty$.
   (d) L'équation $u(x) = 1$ admet exactement trois solutions.
2. Soit f la fonction définie et dérivable sur $]-1\ ;\ 2[$ telle que $f = \ln(u)$.
   On note f' sa fonction dérivée.
   (a) Sur l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$, f change de signe.
   (b) $f'(1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
   (c) L'équation $f(x) = 2$ n'admet aucune solution.
   (d) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0$.

EXERCICE 2. Commun à tous. **5 points**

Pour établir le prix unitaire le plus adapté d'un produit, une société effectue une étude statistique.

Le tableau suivant indique le nombre d'acheteurs, exprimé en milliers, correspondant à un prix unitaire donné, exprimé en euros :

Prix en euros : x_i	4	5	6	7	8	9	10	11
Nombre d'acheteurs en milliers : y_i	125	120	100	80	70	50	40	25

1. Représenter le nuage de points $M_i\,(x_i\ ;\ y_i)$ dans le plan (P) muni d'un repère orthonormal d'unités 1 cm pour un euro sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 milliers d'acheteurs sur l'axe des ordonnées.
2. (a) Déterminer l'équation $y = ax + b$ de la droite (D) d'ajustement affine de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients a et b seront arrondis à l'unité.

   (b) Tracer la droite (D) dans le plan (P).

   (c) En utilisant l'ajustement affine précédent, estimer graphiquement, à l'euro près, le prix unitaire maximum que la société peut fixer si elle veut conserver des acheteurs.
3. (a) En utilisant l'ajustement affine précédent, justifier que la recette $R(x)$, exprimée en milliers d'euros, en fonction du prix unitaire x d'un objet, exprimé en euros, vérifie :

   $$R(x) = -15x^2 + 189x.$$

   (b) Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

   $$f(x) = -15x^2 + 189x.$$

   (c) Quel conseil peut-on donner à la société ? Argumenter la réponse.

Exercice 3. Commun à tous **6 points**

On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $]0~;~20]$ par

$$f(x) = \left(3\text{e}^2 - x\right)\ln x + 10.$$

1. (a) Déterminer la limite de f en 0.
   (b) Calculer la valeur exacte de $f\left(\text{e}^2\right)$, puis une valeur approchée à $0,01$ près.
2. Montrer que, pour tout x de $]0~;~20]$, $f'(x) = -\ln x + \dfrac{3\text{e}^2}{x} - 1$ où f' désigne la dérivée de la fonction f.
3. On admet que la fonction dérivée f' est strictement décroissante sur $]0~;~20]$ et que son tableau de variations est le suivant :

x	0		e^2		20
$f'(x)$	$\Vert$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f'(20)$

   (a) À l'aide du tableau de variations, donner le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0~;~20]$.
   (b) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~20]$ et dresser son tableau de variations sur cet intervalle.
4. (a) Montrer que, sur l'intervalle $[0,6~;~0,7]$, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution notée α. À la calculatrice, donner une valeur approchée de α à $0,001$ près par excès.
   (b) Démontrer que $f(x)$ est négatif pour tout $x \in]0~;~\alpha[$ et que $f(x)$ est positif pour tout $x \in]\alpha~;~20]$.

Partie B

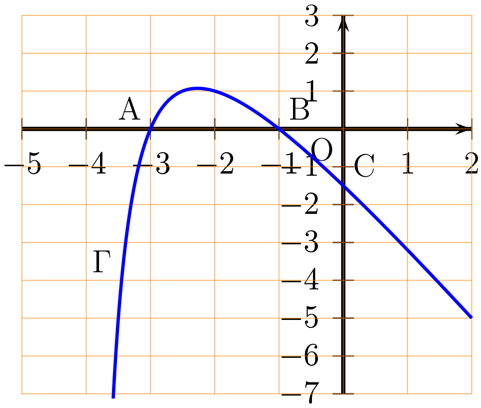
Une entreprise produit et vend chaque semaine x milliers de DVD, x appartenant à $]0~;~20]$. Le bénéfice réalisé est égal à $f(x)$ milliers d'euros où f est la fonction étudiée dans la partie A.

En utilisant les resultats de la partie A :

1. déterminer le nombre minimal de DVD à fabriquer pour que le bénéfice soit positif ;
2. déterminer le nombre de DVD à produire pour que le bénéfice soit maximal ainsi que la valeur, à 10 euros près, de ce bénéfice maximal.

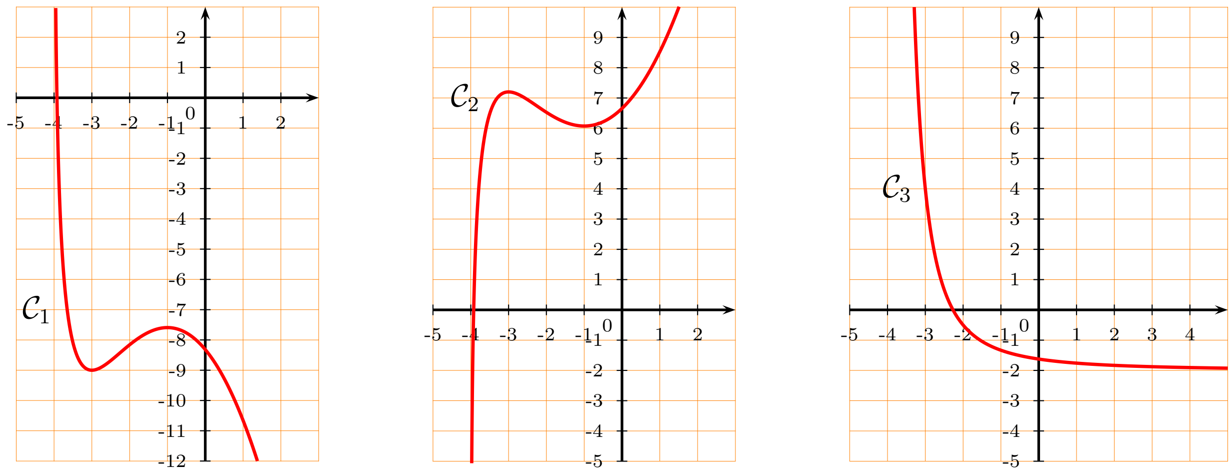
Exercice 4. Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité **5 points**

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-4\ ;\ +\infty[$.
On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]-4\ ;\ +\infty[$.
La courbe Γ ci-contre est la représentation graphique dans un repère orthogonal de f' (et pas f !), la fonction dérivée de f sur $]-4\ ;\ +\infty[$.
Cette courbe Γ passe par les points $A(-3\ ;\ 0)$, $B(-1\ ;\ 0)$ et $C(0\ ;\ -1,5)$.



Partie A

1. À l'aide de la représentation graphique de la fonction dérivée f', déterminer $f'(0)$ et $f'(-3)$.
2. Trois courbes sont présentées ci-dessous. Une seule de ces trois courbes peut représenter la fonction f.
   Déterminer laquelle des trois représentations graphiques ci-dessous est celle de la fonction f, en justifiant votre réponse :



Partie B

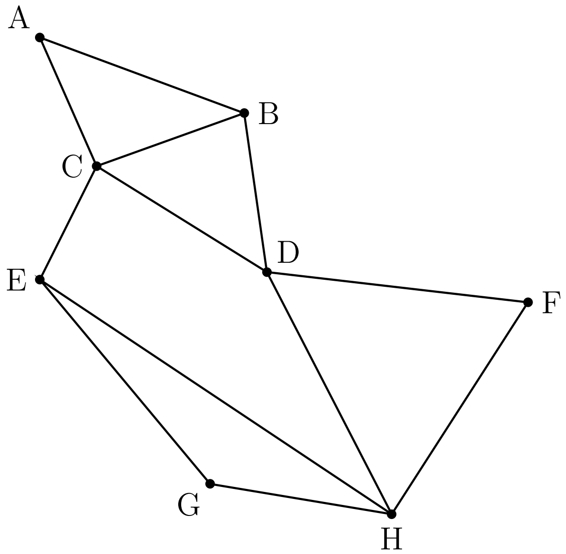
On suppose qu'il existe deux entiers relatifs a et b tels que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-4\ ;\ +\infty[$, on a $f(x) = ax^2 + b\ln(x+4)$.

1. (a) Soit x un réel appartenant à l'intervalle $]-4\ ;\ +\infty[$.
   Exprimer $f'(x)$ en fonction de x, a et b.
   (b) Déduire des questions précédentes que $a = -1$ et $b = -6$
2. On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-3}^{-1} f'(x)\,\mathrm{d}x$.
   (a) Calculer la valeur exacte de l'intégrale I et en donner une valeur arrondie à $0,1$ près.
   (b) Donner une interprétation géométrique de l'intégrale I.

Exercice 4. Reservé aux élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité. **5 points**

Un orchestre doit effectuer une tournée passant par les villes A, B, C, D, E, F, G et H, en utilisant le réseau autoroutier.

Le graphe Γ ci-dessous représente les différentes villes de la tournée et les autoroutes reliant ces villes (une ville est représentée par un point, une autoroute par une arête) :



1. Est-il possible d'organiser la tournée en passant au moins une fois par chaque ville, tout en empruntant une fois et une seule chaque tronçon d'autoroute ? (la réponse sera justifiée). Si oui citer un trajet de ce type.
2. On appelle M la matrice associée au graphe Γ (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique).
   On donne la matrice M^3 :

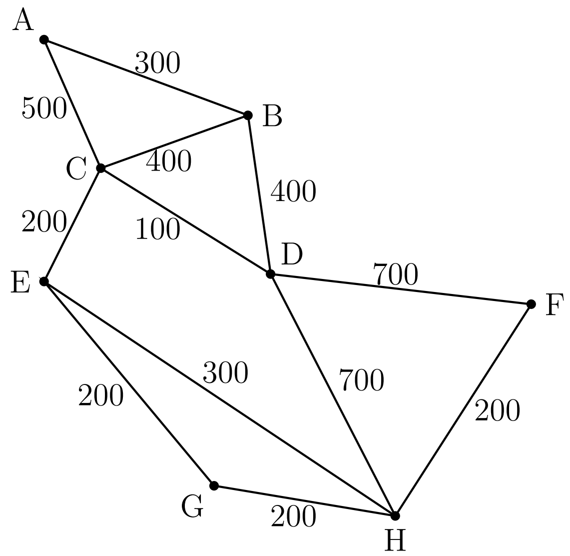
$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 4 & 9 & 7 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 9 & 4 & 3 & 5 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 7 & 3 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 8 & 7 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

   Combien existe-t-il de chemins de longueur 3 reliant B à H ? (la réponse devra être justifiée).
   Préciser ces chemins.

Tourner la page →

3. Des contraintes de calendrier imposent en fait d'organiser un concert dans la ville F immédiatement après un concert dans la ville A.

   Le graphe Γ est complété ci-dessous par les longueurs en kilomètres de chaque tronçon (les longueurs des segments ne sont pas proportionnelles aux distances).



   Déterminer, en utilisant un algorithme dont on citera le nom, le trajet autoroutier le plus court (en kilomètres) pour aller de A à F.

   Préciser la longueur en kilomètres de ce trajet.