

CONTRÔLE 7 : LOGARITHME -26-01-12-
Terminale ES2, 2010-2011, Y. Angeli

Partie A.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = 18 \ln x - x^2 + 16x - 15.$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.
2. Montrer que pour $x > 0$, $f(x) = x \left(18 \frac{\ln(x)}{x} - x + 16 \right) - 15$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. Calculer $f'(x)$. Vérifier que, pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, on a $f'(x) = \frac{-2x^2 + 16x + 18}{x}$.
4. Étudier le signe de $f'(x)$. En déduire les variations de la fonction f .
5. (a) Calculer $f(1)$.
(b) Montrer que sur l'intervalle $[18; 19]$ l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α . Déterminer une valeur approchée par défaut de α à 10^{-2} près.
(c) En déduire le signe de $f(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0,5; 25]$.

Partie B.

Une entreprise fabrique et vend à des particuliers des panneaux solaires photovoltaïques produisant de l'électricité. Elle en produit chaque mois entre 50 et 2500.

Si $x \in [0,5; 25]$ représente le nombre de centaines de panneaux solaires fabriqués et vendus, alors on admet que $f(x)$ représente le bénéfice mensuel de l'entreprise, en milliers d'euros.

1. Justifier les réponses aux questions suivantes à partir de la partie A.
 - (a) Quels sont le nombre minimal et le nombre maximal de panneaux que l'entreprise doit produire et vendre pour être bénéficiaire ?
 - (b) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

L'entreprise peut-elle réaliser un bénéfice mensuel de 100000 € ? Justifier la réponse.

2. On admet que la fonction G définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $G(x) = x \ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $]0; +\infty[$. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0,5; 25]$.
3. *Rappel : soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a; b]$, où $a < b$. La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$ est le nombre réel m défini par*

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Déterminer la valeur moyenne du bénéfice mensuel de l'entreprise, arrondie à la centaine d'euros, lorsque celle-ci produit et vend entre 100 et 1800 panneaux solaires.