Contrôle 5 : Fonctions composées -09-11-11-
Terminale ES 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1.

Soit v une fonction définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ telle que :

x	0		2		$+\infty$
v	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3

1. Que vaut $v(2)$? Quelles sont les asymptotes à la courbe de v ?
2. Montrer que l'équation $v(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0;2[$ puis sur $[0;+\infty[$.
3. Dresser le tableau de signes de $v'(x)$.
4. Soit h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{1}{v(x)}$.
   (a) Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}_h$ de h ?
   (b) Exprimer $h'(x)$ en fonction de $v(x)$ et $v'(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_h$.
   (c) Expliquer pourquoi $h'(x)$ et $v'(x)$ sont de signes contraires.
   (d) Dresser le tableau de variations de h.

Exercice 2.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

1. De quelles fonctions la fonction f est-elle la composée ?
2. Dresser le tableau de signes de $25 - x^2$.
3. En déduire que f est définie sur $[-5;5]$.
4. Montrer que pour tout $x \in]-5;5[$, $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$.
5. Dresser le tableau de variations de f.
6. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3.

Exercice 3.

Soit $g :]0;+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \left(4 - \dfrac{1}{x}\right)^3$.

1. Écrire g comme la composée de deux fonctions.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$
3. Montrer que pour $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{3}{x^2}\left(4 - \dfrac{1}{x}\right)^2$.
4. Dresser le tableau de variations complet de g.

Contrôle 5 : Fonctions composées -09-11-11-
Terminale ES 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1.

Soit v une fonction définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ telle que :

x	0		4		$+\infty$
v	4	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-2

1. Que vaut $v(4)$? Quelles sont les asymptotes à la courbe de v ?
2. Montrer que l'équation $v(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[0;4]$ puis sur $[0;+\infty[$.
3. Dresser le tableau de signes de $v'(x)$.
4. Soit h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{1}{v(x)}$.
   (a) Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}_h$ de h ?
   (b) Exprimer $h'(x)$ en fonction de $v(x)$ et $v'(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_h$.
   (c) Expliquer pourquoi $h'(x)$ et $v'(x)$ sont de signes contraires.
   (d) Dresser le tableau de variations de h.

Exercice 2.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$

1. De quelles fonctions la fonction f est-elle la composée ?
2. Dresser le tableau de signes de $100 - x^2$.
3. En déduire que f est définie sur $[-10;10]$.
4. Montrer que pour tout $x \in]-10;10[$, $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{100 - x^2}}$.
5. Dresser le tableau de variations de f.
6. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 6.

Exercice 3.

Soit $g :]0;+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \left(2 - \dfrac{1}{x}\right)^3$.

1. Écrire g comme la composée de deux fonctions.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$
3. Montrer que pour $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{3}{x^2}\left(2 - \dfrac{1}{x}\right)^2$.
4. Dresser le tableau de variations complet de g.