Contrôle commun : mathématiques obligatoires -30-05-12-
Terminale ES , 2011-2012, Lycée Newton

Exercice 1. Reservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité (5 points)

Un club de natation propose à ses adhérents trois types d'activité : la compétition, le loisir ou l'aquagym. Chaque adhérent ne peut pratiquer qu'une seule des trois activités.

30 % des adhérents au club pratiquent la natation en loisir, 20 % des adhérents au club pratiquent l'aquagym et le reste des adhérents pratiquent la natation en compétition.

Cette année, le club propose une journée de rencontre entre tous ses adhérents. 20 % des adhérents de la la section loisir et un quart des adhérents de la section aquagym participent à cette rencontre. 30 % des adhérents de la section compétition ne participent pas à cette rencontre.

On interroge au hasard une personne adhérente à ce club. On considère les évènements suivants :

A « La personne interrogée pratique l'aquagym »,
C « La personne interrogée pratique la natation en compétition »,
L « La personne interrogée pratique la natation en loisir »,
R « La personne interrogée participe à la rencontte » et $\overline{\text{R}}$ son événenement contraire.

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. (a) Calculer la probabilité que la personne interrogée pratique la natation en compétition et qu'elle participe à la rencontre.
   (b) Le président du club déplore que plus de la moitié des adhérents ne participent pas à la rencontre. Justifier son affirmation par un calcul.
3. On interroge une personne au hasard lors de la rencontre. Calculer la probabilité qu'elle soit dans la section compétition. *Donner une valeur approchée du résultat arrondie à* 10^{-2} *près.*
4. Les tarifs du club pour l'année sont les suivants : l'adhésion à la section compétition est de 100 € et l'adhésion à la section loisir ou à l'aquagym est de 60 €. De plus, une somme de 15 € est demandée aux adhérents qui participent à la rencontre.
   On appelle S la somme annuelle payée par un adhérent de ce club (adhésion et participation éventuelle à la rencontre).
   (a) Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de S :

S_i	60	75	100	115
p_i		0,11		0,35

   (b) Calculer l'espérance mathématique de S et interpréter ce nombre.

EXERCICE 2. (6 points)

Partie A : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,5\,;\ 8]$ par

$$f(x) = 20(x-1)\mathrm{e}^{-0,5x}.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0,5\,;\ 8]$

1. (a) Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,5\,;\ 8]$

$$f'(x) = 10(-x+3)\mathrm{e}^{-0,5x}$$

   (b) Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $[0,5\,;\ 8]$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f.

2. Construire la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

   On prendra pour unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm, sur l'axe des ordonnées.

3. Justifier que la fonction F définie sur l'intervalle $[0,5\,;\ 8]$ par $F(x) = \dfrac{-40(x+1)}{\mathrm{e}^{0,5x}}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0,5\,;\ 8]$.

4. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{1,5}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B : Application économique

Une entreprise produit sur commande des bicyclettes pour des municipalités.
La production mensuelle peut varier de 50 à 800 bicyclettes.
Le bénéfice mensuel réalisé par cette production peut être modélisé par la fonction f de la partie A de la façon suivante :
si, un mois donné, on produit x centaines de bicyclettes, alors $f(x)$ modélise le bénéfice, exprimé en milliers d' euros, réalisé par l'entreprise ce même mois.
Dans la suite de l'exercice, on utilise ce modèle.

1. (a) Vérifier que si l'entreprise produit 220 bicyclettes un mois donné, alors elle réalise ce mois-là un bénéfice de 7989 euros.

   (b) Déterminer le bénéfice réalisé par une production de 408 bicyclettes un mois donné.

2. *Pour cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte*

   Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats de la **partie A** et le modèle précédent.

   Justifier chaque réponse.

   (a) Combien, pour un mois donné, l'entreprise doit-elle produire au minimum de bicyclettes pour ne pas travailler à perte ?

   (b) Combien, pour un mois donné, l'entreprise doit-elle produire de bicyclettes pour réaliser un bénéfice maximum. Préciser alors ce bénéfice à l'euro près.

   (c) Combien, pour un mois donné, l'entreprise doit-elle produire de bicyclettes pour réaliser un bénéfice supérieur à 8000 euros ?

EXERCICE 3. commun à tous les candidats (5 points)

Le tableau ci-dessous donne en euros le montant des remboursements annuels y_i effectués de 2003 à 2007 par un ménage, à la suite de divers emprunts :

Année	2003	2004	2005	2006	2007
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5
y_i	6096	7602	9170	11155	15385

1. Construire le nuage de points $M_i\,(x_i\ ;\ y_i)$, avec i compris entre 1 et 5, associe à cette série statistique. On prendra comme unité graphique 2 cm pour 1 en abscisse et 1 cm pour 1000 euros en ordonnée.

   On commencera les graduations au point de coordonnées (0 ; 6000).
2. On pose, pour i variant de 1 à 5, $z_i = \ln y_i$.
   (a) Calculer z_i en arrondissant les valeurs à 10^{-3} près.
   (b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de z en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients obtenus à l'aide de la calculatrice seront arrondis au centième.
   (c) En déduire que l'on peut écrire une relation entre y et x sous la forme : $y = \mathrm{A}e^{\mathrm{B}x}$ avec $\mathrm{A} \approx 4817$ et $\mathrm{B} \approx 0,22$.
   (d) En supposant, que cet ajustement reste valable en 2008, estimer le montant des remboursements annuels de ce ménage en 2008, arrondi à l'euro.
3. **Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.**

   Ce ménage disposait de 50000 euros de revenu annuel en 2006. On estime que son revenu annuel augmente de 2 % par an.

   La banque alerte ses clients lorsque le montant des remboursements des emprunts dépasse le tiers du montant des revenus.

   En quelle année la banque alertera-t-elle ce ménage ? Justifier.

EXERCICE 4. commun à tous les candidats (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des huit questions, trois réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte sans justifier le choix effectué.

Barème : une réponse exacte rapporte $0,5$ *point. Une réponse inexacte ou une absence de réponse n'apporte et n'enlève aucun point.*

1. $\mathrm{e}^{-2\ln 3}$ est égal à
   - $\dfrac{2}{3}$
   - $\dfrac{1}{9}$
   - 9
2. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\mathrm{e}^{3x} - 1 \geqslant 0$ est l'intervalle :
   - $[0\ ;\ +\infty[$
   - $[1\ ;\ +\infty[$
   - $\left[\dfrac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$
3. Une primitive de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln x + 1$ est :
   - $x \mapsto x\ln x + x$
   - $x \mapsto x\ln x$
   - $x \mapsto \dfrac{1}{x}$
4. Le prix TTC (toutes taxes comprises) d'un article est 299 €. Sachant que le taux de la TVA est de 19,6 %, son prix HT (hors taxes) est :
   - $240,40$ €
   - 250 €
   - $279,40$ €
5. Lors d'une expérience aléatoire, on considère deux évènements indépendants A et B tels que $P(\mathrm{A}) = 0,6$ et $P(\mathrm{B}) = 0,2$. On a alors :
   - $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0,8$
   - $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0,68$
   - $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0,92$
6. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique telle que : $U_0 = 2$ et $U_8 = 32$.
   Sa raison est égale à :
   - $\sqrt{2}$
   - 2
   - 4
7. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^x$ est égale à
   - 0
   - $+\infty$
   - $-\infty$
8. Le prix d'un article a doublé en dix ans. L'augmentation annuelle moyenne du prix de l'article, à 1% près, est de
   - 7%
   - 10%
   - 50%

Contrôle commun : mathématiques spécialité -30-05-12-
Terminale ES , 2011-2012, Lycée Newton

Exercice 1. Reservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Rédiger cet exercice sur une copie séparée.

Franck Geek est adepte de jeux vidéo en ligne. Afin de préserver son temps de travail scolaire, il essaye de se modérer. Il constate que :

- s'il a joué un jour, la probabilité qu'il ne le fasse pas le lendemain est de $0,6$;
- s'il n'a pas joué un jour, la probabilité qu'il joue le lendemain est de $0,9$.

Le jour de la rentrée (premier jour), Franck a décidé de ne pas jouer.

1. (a) Quelle est la probabilité que Franck joue le deuxième jour ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'il ne joue pas le deuxième jour ?
2. On note D l'évènement : "Franck a joué" et E l'évènement : "Franck a su résister" .
   (a) Modéliser cette situation par un graphe probabiliste.
   (b) Donner la matrice de transition M associée à ce graphe.
3. Soit n un entier naturel non nul. Soient D_n l'évènement : "Franck a joué le n-ième jour" et E_n l'évènement : "Franck a su résister le n-ième jour ".
   L'état probabiliste lors du n-ième jour est alors donné par la matrice ligne $P_n = (d_n \quad e_n)$ où d_n désigne la probabilité de l'évènement D_n et e_n celle de l'évènement E_n.
   On a ainsi $P_1 = (0 \quad 1)$.
   (a) Déterminer P_2.
   (b) Donner la relation liant P_{n+1} et P_n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, : $d_{n+1} = -0,5d_n + 0,9$.
4. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = d_n - 0,6$.
   (a) Démontrer que la suite u est une suite géométrique.
   Préciser sa raison et la valeur de son premier terme.
   (b) Exprimer alors u_n puis d_n en fonction de n.
   (c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n$ et interpréter ce résultat.