

CONTRÔLE 10 : FONCTION EXPONENTIELLE -11-05-12-
Terminale ES 2, 2011-2012, Y. Angeli

EXERCICE 1.

La courbe (\mathcal{C}) donnée en ANNEXE, est la représentation graphique dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} . On note f' sa fonction dérivée.

Les points A (3 ; e) et B (4 ; 2) appartiennent à cette courbe.

La tangente à la courbe en A est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente (T) à la courbe en B coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 6.

PARTIE I : lecture graphique

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes, sans justifier.

1. Pour quelles valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[3; 10]$ a-t-on $f(x) \leq 2$?
2. Déterminer $f'(3)$ et $f'(4)$.

PARTIE II étude de la fonction

La fonction f représentée dans l'ANNEXE, est la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = (x - 2)e^{(-x+4)}$$

1. (a) Calculer $f(0)$. Donner la valeur décimale arrondie à l'unité.
(b) On donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.
2. (a) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que :
 $f'(x) = (3 - x)e^{(-x+4)}$.
(b) Sur l'intervalle $[0; +\infty[$ étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f .
3. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$g(x) = (1 - x)e^{(-x+4)}$$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

En déduire la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[2; 10]$. On donnera la valeur exacte, puis la valeur décimale arrondie au millièmes.

Rappel : Soit f une fonction et $[a; b]$ un intervalle sur lequel f est définie et dérivable.

La valeur moyenne m de f sur un l'intervalle $[a; b]$ est le nombre m tel que :

$$m = \frac{1}{b - a} \times \int_a^b f(x) dx.$$

PARTIE III : étude d'un bénéfice

Une entreprise vend x centaines de litres de parfum par jour $1,8 \leq x \leq 4,5$.

Le bénéfice en milliers d'euros réalisé, par jour, par l'entreprise lorsqu'elle vend x centaines de litres est donné par $f(x)$ pour $x \in [1,8; 4,5]$. On suppose donc que pour des raisons techniques et commerciales l'entreprise vend au moins 180 litres et au plus 450 litres.

1. Calculer le bénéfice en euros réalisé sur la vente de 400 litres (soit 4 centaines de litres).
2. Déterminer la quantité de litres à vendre par jour pour réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal en euros ? (Donner la réponse arrondie à 1 €).
3. À partir de quelle quantité journalière l'entreprise ne vend-elle pas à perte ?

EXERCICE 2.

On a relevé lors de six années consécutives le chiffre d'affaire d'une entreprise de prêt-à-porter de luxe créée en 2000. Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Chiffre d'affaire y_i (en euros)	160 000	220 000	290 000	390 000	540 000	730 000

1. Pour $i = 1, 2, \dots, 5$ on pose $z_i = \ln y_i$.

(a) Recopier et compléter le tableau suivant (donner une valeur approchée arrondie à 10^{-2} près de chacun des résultats) :

x_i	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln y_i$						

(b) Représenter sur du papier millimétré le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; z_i)$ dans un repère orthonormal du plan (unité 2 cm en commençant à la graduation 10 sur l'axe des ordonnées).

(c) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés (on obtiendra une équation de la forme $z = ax + b$ où les coefficients a et b seront arrondis à 10^{-2} près).

(d) Dédire de ce qui précède une expression de y en fonction de x sous la forme $y = ke^{ax}$, où k est un réel à déterminer et a le coefficient trouvé à la question précédente (le coefficient k sera arrondi à l'unité).

2. On note C la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; \infty[$ par : $C(x) = 120\,000 e^{0,3x}$.

(a) Résoudre par le calcul l'inéquation $C(x) \geq 2\,000\,000$.

(b) On admet que $C(x)$ est le chiffre d'affaire de l'entreprise pour l'année de rang x .

Quel chiffre d'affaire peut-on prévoir pour l'année 2008 (on arrondira le résultat au millier d'euros près) ?

À partir de quelle année le chiffre d'affaire dépassera-t-il 2 millions d'euros ?

ANNEXE DE L'EXERCICE 1

