**CHAPITRE 9 : FONCTION EXPONENTIELLE -11-04-12-**
**Terminale ES 2, 2011-2012, Y. Angeli**

## 1. DÉFINITION ET RELATION FONDAMENTALE

On rappelle que la fonction logarithme néperien ln est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, et admet pour limites $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$. En conséquence, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'équation $\ln(y) = x$ d'inconnue $y$ admet une unique solution.

En outre, si $a, b > 0$, on a : $\boxed{0}$ : $\ln(a) = \ln(b) \Longleftrightarrow a = b$.

**Définition.** Soit $x \in \mathbb{R}$. L'unique solution de l'équation $\ln(y) = x$ d'inconnue $y$ est notée $y = \exp(x)$. La fonction $x \mapsto \exp(x)$ est appelée la *fonction exponentielle*. On a donc :

$$x = \ln(y) \Leftrightarrow y = \exp(x)$$

**Remarque.** L'unique solution de $\ln(y) = 1$ est notée $y = e$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^n = \exp(n)$. En effet, $\ln(e^n) = n\ln(e) = n \times 1 = n = \ln(\exp(n))$ donc $e^n = \exp(n)$. On définit plus généralement le nombre $e^x$ par $e^x = \exp(x)$.

**Théorème.** Pour tout $x, y$ réels et $n \geq 0$ entier, on a :
$\boxed{1}$ $\ln(e^x) = x$ $\boxed{2}$ $e^{\ln x} = x$ si $x > 0$.
$\boxed{3}$ $e^x > 0$ $\boxed{4}$ $e^{x+y} = e^x \times e^y$ $\boxed{5}$ $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ $\boxed{6}$ $(e^x)^n = e^{nx}$

**Preuve.** La propriété $\boxed{1}$ est une conséquence de la définition.
$\boxed{2}$ d'après $\boxed{1}$ : $\ln\left(e^{\ln x}\right) = \ln x$, donc $e^{\ln(x)} = x$. d'après $\boxed{0}$.
$\boxed{3}$ $e^x$ est solution de $\ln(y) = x$ et ln est définie sur $]0, +\infty[$, donc $e^x > 0$.
$\boxed{4}$ $\ln\left(e^{x+y}\right) = x + y = \ln(e^x) + \ln(e^y) = \ln(e^x \times e^y)$ donc $e^{x+y} = e^x \times e^y$ par $\boxed{0}$.
$\boxed{5}$ d'après $\boxed{4}$ : $e^{x-y} = e^x \times e^{-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$. ($e^y \times e^{-y} = e^0 = 1 = e^y \times \dfrac{1}{e^y}$, donc $e^{-y} = \dfrac{1}{e^y}$).
$\boxed{6}$ : $\ln\left((e^x)^n\right) = n\ln(e^x) = nx = \ln(e^{nx})$. On conclue par $\boxed{0}$. $\square$

**Exemple.** Simplifier : $\dfrac{(e^3)^8}{e^2 \times e^{-6}} =$ ..........................................................

.................................................................................................................

Résoudre $\ln(x+1) = 8$ ..........................................................................

.................................................................................................................

Résoudre $e^{\frac{x}{2}} - 5 = 0$ ..........................................................................

.................................................................................................................

Résoudre $e^x - 1 > 0$ ..........................................................................

.................................................................................................................

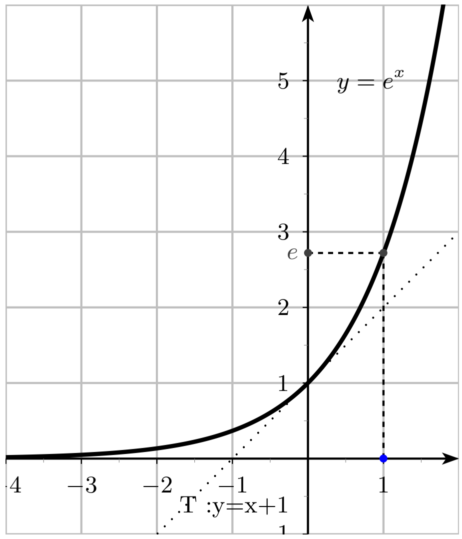
## 2. Étude de la fonction exponentielle

**Théorème.** La fonction exponentielle est dérivable, et $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ pour tout $x$. De plus,

$$\exp(0) = 1, \quad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$

En résumé :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| exp | | | $+\infty$ |
| | | $\nearrow$ | |
| | $0$ | | |




**Preuve.** On admet que la fonction exponentielle est dérivable.
On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\exp(x)) = x$. La dérivée de $f$ est donc :

$$f'(x) = \frac{\exp'(x)}{\exp(x)} = 1$$

ainsi $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ : la fonction exponentielle est strictement croissante.
On pose $x = \ln X$.
Comme $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{\ln X} = \lim\limits_{X \to +\infty} X = +\infty$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^{-x}} = 0 \quad$ car $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$.

**Remarque.** Par la formule de dérivation des fonctions composées, si $u$ est une fonction dérivable sur un intervalle $I$, la fonction $e^u$ est dérivable sur $I$ et a pour dérivée $u'e^u$.

**Propriété.** (croissances comparées) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$.

**Preuve.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln(e^x)} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{\ln X} = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$.
Par ailleurs $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = -\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{e^{-x}} = -\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$. $\square$

**Exemple.** Dresser le tableau de variations de $x \mapsto x + e^{2x+1}$

## 3. Changement de variable et exponentielle

Selon le sujet d'Amérique du Sud de novembre 2010 :

Le tableau suivant donne la capacité de production d'électricité d'origine éolienne installée en France de 2003 à 2008.

| Année | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année $x_i$ : | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Puissance installée en MWh $y_i$ : | 1,9 | 3,3 | 5,5 | 9,4 | 35,5 | 104,5 |
| $z_i = \ln\left(\frac{y_i}{100}\right)$ | | | | | | |

L'allure du nuage suggère de rechercher un ajustement exponentiel de $y$ en $x$. Pour cela on pose pour tout entier naturel $i$ compris entre 0 et 5 : $z_i = \ln\left(\frac{y_i}{100}\right)$

1. Compléter la dernière ligne du tableau. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de $z$ en $x$ par la méthode des moindres carrés.
2. Sachant que $z = \ln\left(\frac{y}{100}\right)$, déterminer l'expression de $y$ sous la forme $ke^{ax}$ où $k$ et $a$ sont des nombres réels à calculer.

## 4. Exponentielle de base a

**Définition.** Soit $a > 0$ et $b$ réel. Le nombre $a^b$ est défini par

$$a^b = e^{b \ln a}.$$

La fonction $x \mapsto a^x$ est appelée *exponentielle de base a*.

**Remarque.** Le taux moyen d'augmentation $\tau$ sur $n$ périodes identiques d'une quantité qui vaut initialement $V_i$ et finalement $V_f$ vérifie :

$$\left(1 + \frac{\tau}{100}\right)^n \times V_i = V_f \text{ donc } \tau = 100\left(\left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

**Exemple.** Un placement rapporte $62,8\%$ d'intérêts sur 10 ans. Quel est le pourcentage annuel moyen d'intérêt ?

**Exemple.** Étudier complètement les trois fonctions suivantes : $x \mapsto x^\pi$, $x \mapsto 0,9^x$ et $x \mapsto x^x$.