## Chapitre 7 : Logarithme Néperien -25-01-12-
Terminale ES 2, 2011-2012, Y. Angeli

# 1. Définition

**Définition.** La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant continue sur $]0;+\infty[$, elle admet une unique primitive qui s'annule en 1. On note ln et on appelle *logarithme néperien* cette primitive :
⋆ ln est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$.
⋆ $\ln(1) = 0$.

**Exemple.** Déterminer l'équation réduite de la tangente $T$ à la courbe de la ln.
.......................................................................................
.......................................................................................
.......................................................................................

**Propriété.** Le logarithme néperien est strictement croissant sur $]0;+\infty[$.

En conséquence, pour tous $a, b > 0$, $\boxed{a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b}$ et $\boxed{\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b.}$

**Preuve.** Par définition, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ sur $]0;+\infty[$ donc ln est strictement croissante. □

**Exemple.** Résoudre $\ln(2x+1) = \ln(1)$.......................................................
.......................................................................................
.......................................................................................

Résoudre $\ln(x+2) > 0$........................................................................
.......................................................................................
.......................................................................................

**Remarque.** En conséquence de la formule de dérivation des fonctions composées, si $u$ est une fonction dérivable et strictement positive, alors

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

**Exemple.** Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \ln(1 - x^2)$.
Déterminer l'ensemble de définition de $f$ et dresser son tableau de variation..................
.......................................................................................
.......................................................................................
.......................................................................................
.......................................................................................
.......................................................................................
.......................................................................................
.......................................................................................

## 2. Propriétés algébrique

**Théorème.** Soient $a, b > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a :

$\boxed{1}$ $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$ $\boxed{2}$ $\ln(a^n) = n \ln a$

$\boxed{3}$ $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$ $\boxed{4}$ $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

**Preuve.** Prouver (1) il suffit de voir que pour tout $a > 0$ fixé, la fonction définie $f$ définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(ax) - \ln(a) - \ln(x)$ est la fonction nulle :

$$\ln(ax) - \ln(a) - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$$

Or, ln étant dérivable, $f$ est dérivable aussi de dérivée :

$$f'(x) = \frac{a}{ax} - 0 - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

donc $f$ est une fonction constante : $f(x) = k$ pour tout $x$.
Mais $f(1) = \ln(a \times 1) - \ln(a) - \ln(1) = \ln(a) - \ln(a) = 0 = k$ donc $f$ est nulle, d'où (1).
(2) [Spé] Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\ln(a^n) = n \ln a$.
*Initialisation :* $0 \ln a = 0 = \ln 1 = \ln(a^0)$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
*Transmission :* si $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier $n$, alors

$$\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a) = \ln(a^n) + \ln(a) = n \ln(a) + \ln(a) = (n+1) \ln a$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
*Conclusion :* La propriété est vraie pour tout entier naturel $n$.
(3) d'après (1), $0 = \ln(1) = \ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \ln b + \ln \frac{1}{b}$ donc $-\ln b = \ln \frac{1}{b}$.
(4) enfin, $\ln \frac{a}{b} = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$. □

**Exemple.**

- $\ln 16 - \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2^3} =$ ..................................................
- $\ln(6400) =$ ..................................................
- Prouver que pour tout $x > 0$, $2 \ln(\sqrt{x}) = \ln(x)$ ..................................................

En déduire $\ln \sqrt{x} =$ ..................................................

- $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t} dt > \int_1^2 \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(4^n) > n$

..................................................

- Au bout de combien d'année double-t-on un capital $C$ placé à 1% ? ..................................................

..................................................

..................................................

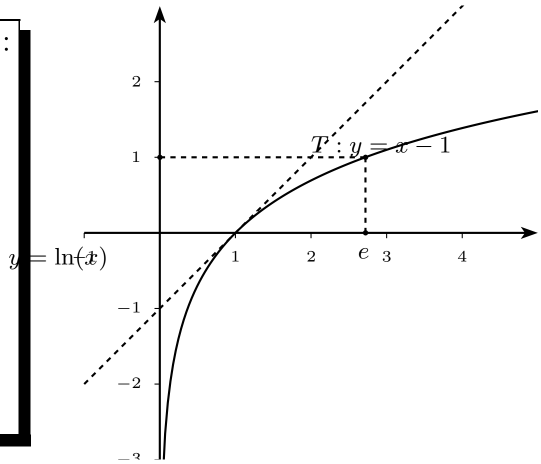
## 3. Étude de la fonction logarithme, nombre $e$

**Théorème.** Limites et croissances comparées :

$\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

| $x$ | $0$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ | $+$ |
| $\ln$ | $-\infty \nearrow +\infty$ |




**Preuve.** Comme $\ln(4^n) > n$, et que ln est strictement croissante, $\ln x$ est supérieur à n'importe quel entier $A$ pourvu que $x$ soit supérieur à $4^A$.
Donc lorsque $x$ tend vers l'infini, $\ln x$ tend aussi vers l'infini.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} -\ln\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty} -\ln X = -\infty$
La fonction $g : x \mapsto \ln x - x$ a pour dérivée $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$. Donc $g$ est strictement croissante sur $]0;1[$ et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$. Son maximum est donc $g(1) = 0$ d'où $\ln x - x \leqslant 0$ donc $\ln(x) \leqslant x$. Or si $x \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \frac{\ln x}{x} = \frac{2\times\frac{1}{2}\ln x}{x} = 2\frac{\ln\sqrt{x}}{x} \leqslant 2\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Enfin, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{X}\ln\dfrac{1}{X} = \lim\limits_{X\to+\infty} -\dfrac{1}{X}\ln X = 0.$ $\square$

**Exemple.** $\lim\limits_{x\to+\infty} -x + \dfrac{\ln(x^2)}{x} =$ ..........................................................

**Nombre $e$**

**Définition.** La fonction ln est strictement croissante sur $]1;4[$, $\ln 1 = 0 < 1 < \ln 4$ et ln est continue sur $[1;4]$. Par le théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $\ln x = 1$ admet une unique solution $e \in ]1;4[$. On appelle $e \approx 2,718$ cette unique solution.
Comme ln est strictement croissante, $e$ est l'unique solution de $\ln x = 1$ sur $]0;+\infty[$. En particulier, $\boxed{\ln(e) = 1}$

**Définition.** Plus généralement, on montre que l'équation $\ln x = y$ admet une solution unique sur $]0;+\infty[$, que l'on note $e^y$. On justifiera ultérieurement la notation en exposant. Ainsi, $\ln(e^y) = y$.

**Exemple.**
Simplifier $\ln(e^7) =$ ..........................................................................

Simplifier $2\ln(\sqrt{e}) =$ ......................................................................

En déduire $\ln(\sqrt{e}) =$ ......................................................................

Simplifier $\ln\dfrac{1}{e} =$ ..........................................................................