

CHAPITRE 7 : LOGARITHME NÉPERIEN -25-01-12-
Terminale ES 2, 2011-2012, Y. Angeli

1. DÉFINITION

Définition. La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant continue sur $]0; +\infty[$, elle admet une unique primitive qui s'annule en 1. On note \ln et on appelle *logarithme néperien* cette primitive :

★ \ln est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$.

★ $\ln(1) = 0$.

Exemple. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe de la \ln .

.....

Propriété. Le logarithme néperien est strictement croissant sur $]0; +\infty[$.

En conséquence, pour tous $a, b > 0$, $a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b$ et $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$.

Preuve. Par définition, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ sur $]0; +\infty[$ donc \ln est strictement croissante. □

Exemple. Résoudre $\ln(2x + 1) = \ln(1)$

Résoudre $\ln(x + 2) > 0$

Remarque. En conséquence de la formule de dérivation des fonctions composées, si u est une fonction dérivable et strictement positive, alors

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Exemple. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1 - x^2)$.
 Déterminer l'ensemble de définition de f et dresser son tableau de variation.....

2. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUE

Théorème. Soient $a, b > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\begin{array}{ll} \boxed{1} \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b) & \boxed{2} \ln(a^n) = n \ln a \\ \boxed{3} \ln \frac{1}{b} = -\ln b & \boxed{4} \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \end{array}$$

Preuve. Prouver (1) il suffit de voir que pour tout $a > 0$ fixé, la fonction définie f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(ax) - \ln(a) - \ln(x)$ est la fonction nulle :

$$\ln(ax) - \ln(a) - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$$

Or, \ln étant dérivable, f est dérivable aussi de dérivée :

$$f'(x) = \frac{a}{ax} - 0 - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

donc f est une fonction constante : $f(x) = k$ pour tout x .

Mais $f(1) = \ln(a \times 1) - \ln(a) - \ln(1) = \ln(a) - \ln(a) = 0 = k$ donc f est nulle, d'où (1).

(2) [Spé] Pour $n \in \mathbb{N}$, soit \mathcal{P}_n la propriété : $\ln(a^n) = n \ln a$.

Initialisation : $0 \ln a = 0 = \ln 1 = \ln(a^0)$ donc \mathcal{P}_0 est vraie.

Transmission : si \mathcal{P}_n est vraie pour un entier n , alors

$$\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a) = \ln(a^n) + \ln(a) = n \ln(a) + \ln(a) = (n + 1) \ln a$$

donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Conclusion : La propriété est vraie pour tout entier naturel n .

(3) d'après (1), $0 = \ln(1) = \ln(b \times \frac{1}{b}) = \ln b + \ln \frac{1}{b}$ donc $-\ln b = \ln \frac{1}{b}$.

(4) enfin, $\ln \frac{a}{b} = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$. □

Exemple.

• $\ln 16 - \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2^3} = \dots\dots\dots$

• $\ln(6400) = \dots\dots\dots$

• Prouver que pour tout $x > 0$, $2 \ln(\sqrt{x}) = \ln(x) \dots\dots\dots$

En déduire $\ln \sqrt{x} = \dots\dots\dots$

• $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t} dt > \int_1^2 \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(4^n) > n$

$\dots\dots\dots$

• Au bout de combien d'année double-t-on un capital C placé à 1%? $\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

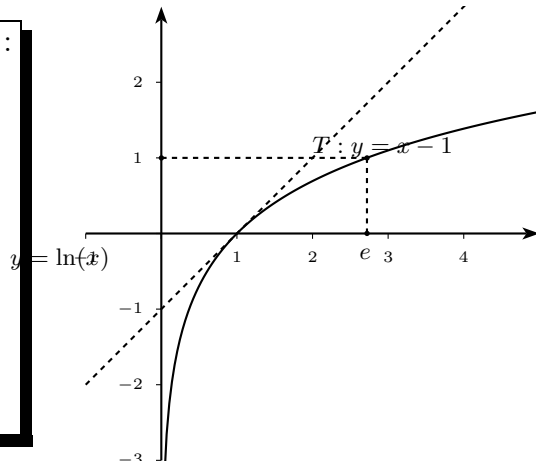
3. ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME, NOMBRE e

Théorème. Limites et croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

x	0	$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$		+
\ln	$-\infty$	$+\infty$



Preuve. Comme $\ln(4^n) > n$, et que \ln est strictement croissante, $\ln x$ est supérieur à n'importe quel entier A pourvu que x soit supérieur à 4^A .

Donc lorsque x tend vers l'infini, $\ln x$ tend aussi vers l'infini.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln \frac{1}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\ln X = -\infty$

La fonction $g : x \mapsto \ln x - x$ a pour dérivée $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$. Donc g est strictement croissante sur $]0; 1[$ et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$. Son maximum est donc $g(1) = 0$ d'où $\ln x - x \leq 0$ donc $\ln(x) \leq x$. Or si $x \geq 1$,

$$0 \leq \frac{\ln x}{x} = \frac{2 \times \frac{1}{2} \ln x}{x} = 2 \frac{\ln \sqrt{x}}{x} \leq 2 \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Enfin, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \ln \frac{1}{X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{1}{X} \ln X = 0$. □

Exemple. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \frac{\ln(x^2)}{x} = \dots\dots\dots$

Nombre e

Définition. La fonction \ln est strictement croissante sur $]1; 4[$, $\ln 1 = 0 < 1 < \ln 4$ et \ln est continue sur $[1; 4]$. Par le théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $\ln x = 1$ admet une unique solution $e \in]1; 4[$. On appelle $e \approx 2,718$ cette unique solution.

Comme \ln est strictement croissante, e est l'unique solution de $\ln x = 1$ sur $]0; +\infty[$. En particulier, $\boxed{\ln(e) = 1}$

Définition. Plus généralement, on montre que l'équation $\ln x = y$ admet une solution unique sur $]0; +\infty[$, que l'on note e^y . On justifiera ultérieurement la notation en exposant. Ainsi, $\ln(e^y) = y$.

Exemple.

Simplifier $\ln(e^7) = \dots\dots\dots$

Simplifier $2 \ln(\sqrt{e}) = \dots\dots\dots$

En déduire $\ln(\sqrt{e}) = \dots\dots\dots$

Simplifier $\ln \frac{1}{e} = \dots\dots\dots$