Chapitre 6 : Primitives et calcul intégral -03-01-12-
Terminale ES 2, 2011-2012, Y. Angeli

1. Notion de primitive

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une *primitive* de f sur I est une fonction F définie et dérivable sur I et qui vérifie : $F' = f$ sur I.

Exemple. Une primitive de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x$ est la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$.
On a en effet pour $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 2x = f(x)$, c'est-à-dire : $F' = f$.

⚠ Attention, une fonction admettant une primitive en admet une infinité. Dans l'exemple précédent, la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est également une primitive de la fonction $x \mapsto 2x$.

Exemple. Déterminer une primitive F de $f :]0; +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$........................
....
....

Méthode. En conséquence de la définition, pour vérifier qu'une fonction F donnée est une primitive d'une fonction f donnée, il suffit de dériver F et de vérifier que l'on retrouve f.

Exemple. Montrer que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{8}(x^2+1)^4$ est une primitive de $f :\ x \mapsto x(x^2+1)^3$.
....
....
....

Propriété. (Linéarité) Si f et g sont deux fonctions admettant respectivement F et G comme primitives sur l'intervalle I, et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$ sur I.

Preuve. En conséquence de la linéarité des dérivées : $(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g$. □

Exemple. Déterminer une primitive F sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto 2x - 7$...........................
....
....

Méthode. Si une fonction f est égale à un facteur près à une dérivée g' (classique ou de fonction composée), une primitive F de f est de la forme $F = k\ g$.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$. Comme $(x^2)' = 2x$, on cherche une primitive de la forme $F(x) = kx^2$. Donc $F'(x) = k \times 2x = f(x)$ pour $k = \frac{1}{2}$. Ainsi, F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{2}x$ convient.

Propriété. Soit $n \neq -1$. Une primitive de $f : I \to \mathbb{R}\ x \mapsto x^n$ est $F : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{n+1}x^n$.

Preuve. ....
....
.... □

Exemple. En déduire une primitive de $x \mapsto x^3 - 3x + 5$...................................
....
....

2. Ensemble des primitives d'une fonction

Propriété. Si f admet F comme primitive sur l'intervalle I, alors les primitives de f sur I sont les fonctions G de la forme $G : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Preuve. Soit G une autre primitive de f sur I. Alors, la fonction H définie sur I par $H(x) = G(x) - F(x)$ est dérivable et pour $x \in I$, $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$.
Donc H est une constante réelle k d'où $G(x) - F(x) = k$ donc $G(x) = F(x) + k$.
Réciproquement, si $k \in \mathbb{R}$ la fonction définie sur I par $G(x) = F(x) + k$ a pour dérivée $G'(x) = F'(x) = f(x)$ sur I, donc est une primitive de f. $\square$

Propriété. Soit f admettant F comme primitive sur l'intervalle I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

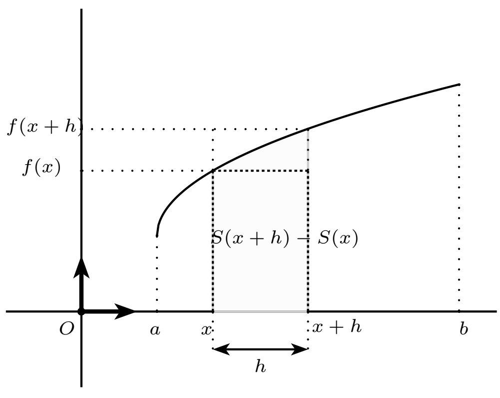
Preuve. Les primitives de f sont de la forme $G(x) = F(x) + k$. Donc $G(x_0) = F(x_0) + k = y_0$ si et seulement si $k = y_0 - F(x_0)$. D'où f a pour unique primitive satisfaisant $G(x_0) = y_0$ la fonction définie par $G(x) = F(x) - F(x_0) + y_0$. $\square$ $\square$

Exemple. Donner l'ensemble des primitives de $x \mapsto \frac{1}{x^2} + x^2$ ....
....
....
....

Exemple. Donner la primitive de $x \mapsto 1 + x^2$ qui s'annule en $x = 2$ ....
....
....
....

3. Aire sous une courbe

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$. Soit $\mathcal{C}$ sa courbe dans le plan muni d'un repère orthogonal. Pour tout $x \in [a, b]$, on note $S(x)$ l'aire en unités d'aire de la surface située entre la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses, et entre les abscisses a et x.
On a alors : S dérivable sur $[a, b]$, et $S' = f$.



Preuve. Pour simplifier, on suppose en plus f croissante sur $[a, b]$. Soit $h > 0$. On encadre l'aire $S(x+h) - S(x)$ par l'aire de deux rectangles de base h et de hauteurs respectives $f(x)$ et $f(x+h)$.
ainsi, $hf(x) \leqslant S(x+h) - S(x) \leqslant hf(x+h)$ d'où : $f(x) \leqslant \dfrac{S(x+h) - S(x)}{h} \leqslant f(x+h)$.

En raisonnant de même pour h négatif, on obtient une inégalité en sens inverse.

Or f est continue : $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$. D'où : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{S(x+h) - S(x)}{h} = S'(x) = f(x)$. $\square$.

Corollaire. Une fonction f continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.

Exemple. La fonction $]0; +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue ; elle admet donc une unique primitive qui vaut 0 en $x = 1$. On appelle *logarithme Néperien* et on note $x \mapsto \ln x$ cette fonction.

4. Notion d'intégrale

Définition. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et F une primitive de f. Les deux notations qui suivent désignent le nombre $F(b) - F(a)$:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Ce nombre est appelé *intégrale* entre a et b de la fonction f. Le x dans la notation est une variable muette.

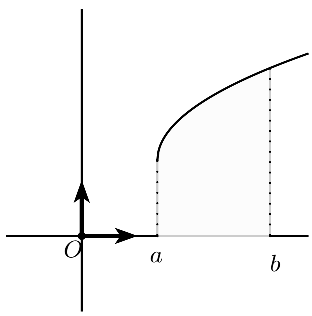
Remarque. On remarque que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ ne dépend pas du choix de la primitive F : en effet, si $G = F + k$ est une autre primitive de f,

$$G(b) - G(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Exemple. $\displaystyle\int_1^2 3x^2dx =$ ....

Théorème. Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$, l'aire $\mathcal{A}$ de la surface composée des $M(x; y)$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ est donnée par

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx \text{ unités d'aire.}$$



Preuve. D'après le paragraphe 3, cette aire vaut $\mathcal{A} = S(b) - S(a)$ où S est une primitive de f. □

⚠ si l'unité du repère n'est pas le cm, pour obtenir l'aire en cm^2 il faut effectuer une conversion : par exemple si l'unité est 2cm, l'unité d'aire est $(2cm)^2 = 4cm^2$.

Exemple. Calculer en cm^2 l'aire du domaine situé entre $y = 1 - x^2$ et $y = 0$ dans un repère d'unité $0,5$cm. ....
....
....
....
....

Définition. La valeur moyenne d'une fonction continue f sur un intervalle $[a; b]$ est le nombre

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Exemple. Valeur moyenne de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ entre 1 et 5. ....
....
....
....

Remarque. Lien entre intégrale et primitive : La fonction $G : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f : en effet, si F est une primitive de f, $G(x) - F(x) = F(x) - F(a) - F(x) = -F(a)$ donc F et G ne diffèrent que d'une constante : G est bien une autre primitive de f.

5. Propriétés des intégrales

Propriété. *Linéarité.* Si les fonctions f et g sont continues sur un intervalle $[a, b]$, et $c \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \text{ et } \int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

Preuve C'est une conséquence de la propriété analogue des primitives : si F et G sont des primitives respectives de f et g, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ donc :

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) + g(x))dx &= F(b) + G(b) - (F(a) + G(a)) \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

De même, si F est une primitve de f alors cF est un primitive de cf donc

$$\int_a^b cf(x)dx = cF(b) - cF(a) = c(F(b) - F(a)) = c\int_a^b f(x)dx \qquad \square$$

Propriété. *Relation de Chasles.* Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et $a, b, c \in I$:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx, \text{ en particulier } \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Preuve. On utilise encore la définition : si F est une primitve de f, on a :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx$$

En particulier, $0 = \int_a^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx.$ $\square$

Exemple. Soit f définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = 2$ si $x \leqslant 1$ et $f(x) = 2x$ si $x > 1$.

$\int_0^2 f(x)dx =$ ....

Propriété. *Positivité.* Si f est continue, positive et non identiquement nulle sur $[a; b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

Preuve. Une primitive F de f vérifie $F' = f > 0$ sur $[a, b]$, F est strictement croissante sur $[a, b]$ donc $F(b) > F(a)$ d'où $0 < F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$ $\square$

Remarque. En conséquence si f et g sont continues sur $[a; b]$ et telles que $f \leqslant g$ alors $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$.

Exemple. Montrer que pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{(x^2 + 1)} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$.

....

En déduire : $\int_1^t \dfrac{1}{(x^2 + 1)^2} \leqslant 1 - \dfrac{1}{t}$.

....
....
....