Chapitre 5 : Dérivation -24-11-11-
Terminale ES 2, 2011-2012, Y. Angeli

1. Nombre dérivé

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Le *taux d'accroissement* $\tau_{x_0,h}f$ de f entre $x_0 \in I$ et $x_0 + h \in I$ est $\tau_{x_0,h}f = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

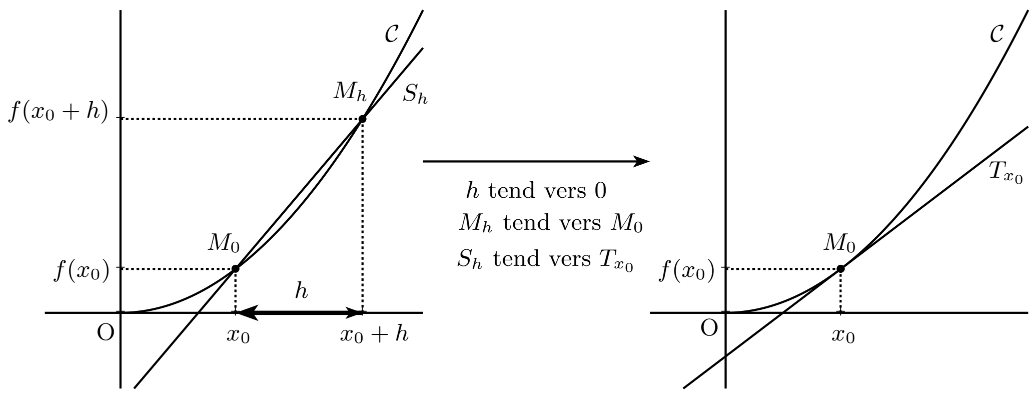
Si la limite, lorsque h tend vers 0, du taux d'accroissement $\tau_{x_0,h}$ existe, la fonction f est dite *dérivable* en x_0. Cette limite est alors appelée le *nombre dérivé* $f'(x_0)$ de f en x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f est $\tau_{x,h}f = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x + h$. La limite lorsque h tend vers 0 de $\tau_{x,h}$ est $f'(x) = 2x$.

Interprétation géométrique

Soit f une fonction définie sur I et dérivable en $x_0 \in I$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On note M_0 le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x_0 et M_h le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $x_0 + h$. Le coefficient directeur de la sécante $S_h = (M_0M_h)$ à la courbe $\mathcal{C}$ est le taux d'accroissement $\tau_{x_0,h}f$. Lorsque h tend vers 0, la position limite de M_h est celle du point M et la position limite de la sécante S_h est la tangente T_{x_0} à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x_0. Le coefficient directeur de cette tangente est $f'(x_0)$, la limite des coefficients directeurs des sécantes.



Soit f une fonction définie sur I et dérivable en $x_0 \in I$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. La *tangente* à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x_0 est la droite T_{x_0} d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. En particulier, le coefficient directeur de cette tangente est $f'(x_0)$.

Exemple. Déterminer l'équation de la tangente à la parabole $\mathcal{P}$ de la fonction $f : x \mapsto x^2$ au point $(1, 1)$. . . . .
. . . .

2. Calcul de fonctions dérivées

Lorsqu'une fonction f est dérivable en tout x d'un intervalle I, on appelle *fonction dérivée* et on note f' la fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$.

Pour calculer les dérivées de fonctions compliquées, on commence par déterminer les dérivées de fonctions usuelles (par le calcul du taux d'accroissement), et on utilise des règles de calcul sur les fonctions dérivées :

Dérivées des fonctions usuelles

Théorème.
$\star$ La fonction $x \mapsto ax+b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto a$. $(a, b \in \mathbb{R})$
$\star$ La fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto nx^{n-1}$ ($n \geqslant 1$ entier).
$\star$ La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$ de dérivée $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.
$\star$ La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ de dérivée $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Opérations usuelles

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I. Alors
$\star$ $u+v$ est dérivable sur I de dérivée $(u+v)' = u' + v'$.
$\star$ uv est dérivable sur I de dérivée $(uv)' = u'v + v'u$.
$\star$ ku est dérivable sur I de dérivée $(ku)' = ku'$. (où $k \in \mathbb{R}$)
$\star$ $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I privé des x tels que $v(x) = 0$, de dérivée $-\frac{v'}{v^2}$.
$\star$ $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I privé des x tels que $v(x) = 0$, de dérivée $\frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Preuve. $\star$ Pour la somme, on calcule le taux d'accroissement de $(u+v)$:
$\tau_{x,h}(u+v) = \frac{u(x+h)+v(x+h)-(u(x)+v(x))}{h} = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h} = \tau_{x,h}u + \tau_{x,h}v$.
En faisant tendre h vers 0 on a bien : $(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$.
$\star$ Pour le produit, on procède de même :

$$\begin{aligned} \tau_{x,h}(u \times v)(x) &= \frac{u(x+h) \times v(x+h) - u(x) \times v(x)}{h} \\ &= \frac{u(x+h) \times v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x) \times v(x)}{h} \\ &= \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \times v(x+h) + u(x) \times \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \end{aligned}$$

En faisant tendre h vers 0 on a bien : $(u \times v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.
$\star$ La dérivée de ku est un cas particulier de la situation précédente : $v(x) = k$ et $v'(x) = 0$.
$\star$ La dérivée de $\frac{1}{v}$ est un cas particulier de composition de fonctions.
$\star$ La dérivée de $\frac{u}{v}$ s'obtient par la formule de dérivée d'un produit appliquée à $u \times \frac{1}{v}$. $\square$.

Exemple. Calculer la dérivée de $f :]0; +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x\sqrt{x}$. ....
....
....
....

Exemple. Calculer la dérivee de $g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x^n}$ ($n \geqslant 1$ entier). En déduire que la deuxième formule des dérivées usuelles est en fait valable pour $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

3. Fonctions composées

Une fonction composée s'écrit comme l'enchainement de deux fonctions (ou davantage) :

Définition

Soient deux fonctions $u : I \to J$ et $v : J \to \mathbb{R}$. La fonction *composée* de v et u est la fonction notée $v \circ u$ définie par $v \circ u : x \in I \xrightarrow{u} u(x) \in J \xrightarrow{v} v(u(x))$.

Exemple. La fonction $f : \ x \mapsto \sqrt{4 - 4x}$ est la composée des fonctions :
....
....
elle est définie pour : ....

Exemple. La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto (x^2 + 1)^6$ est la composée des fonctions :
....
....

Dérivation d'une fonction composée

Soient deux fonctions dérivables $u : I \to J$ et $v : J \to \mathbb{R}$. La fonction $v \circ u$ est dérivable de dérivée : $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$ donc $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$.

Preuve. On calcule le taux d'accroissement (sous l'hypothèse $u(x + h) - u(x) \neq 0$) :
$\tau_{x,h}(v \circ u) = \dfrac{v(u(x + h)) - v(u(x)}{h} = \dfrac{u(x + h) - u(x)}{h} \times \dfrac{v(u(x + h)) - v(u(x))}{u(x + h) - u(x)}$.
En faisant tendre h vers 0, $u(x + h)$ tend vers $u(x)$ et il vient $(v \circ u') = u' \times v' \circ u$. $\square$

Exemple. Calculer la dérivée de la fonction f définie plus haut. ....
....
....
....
....

Exemple. Calculer la dérivée de la fonction g définie plus haut. ....
....
....
....
....

Limite d'une fonction composée

Soient deux fonctions $u : I \to J$ et $v : J \to \mathbb{R}$. La limite de la fonction *composée* $v \circ u$ en a (réel ou $+\infty$ ou $-\infty$) est $\lim\limits_{X \to L} v(X)$ où $L = \lim\limits_{x \to a} u(x)$.

Preuve. Idée : on pose $X = u(x)$

Exemple. Calculer la limite en $-\infty$ de la fonction f définie plus haut. ....
....
....

Exemple. Calculer la limite en $-\infty$ de la fonction g définie plus haut. ....
....
....

4. Applications

Variations

Théorème. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$.
- $f'(x) > 0$ sur $]a, b[$ (sauf en des points isolés[1]) $\Longleftrightarrow$ f est strictement croissante sur $[a, b]$.
- $f'(x) < 0$ sur $]a, b[$ (sauf en des points isolés) $\Longleftrightarrow$ f est strictement décroissante sur $[a, b]$.
- $f'(x) = 0$ sur $]a, b[$ si et seulement si f est constante sur $[a, b]$.

Remarque. ⚠ ce qui suit ne consitute pas une démonstration rigoureuse. La preuve exacte nécessite des connaissances plus pousées sur la topologie des nombre réels.
Si $f'(x) > 0$ sur I, cela signifie que toutes les tangentes à $\mathcal{C}_f$ su r I ont un coefficient directeur strictement positif, donc sont strictement croissantes. En admettant qu'en un voisinage petit de $x \in I$, la courbe et sa tangente sont presques identiques, on peut imaginer que f est strictement croissante au voisinage de chaque $x \in I$, donc sur I.

Exemple. Déterminer les tableaux de variation des fonctions f et g précédentes. Expliquer pourquoi g admet un maximum.

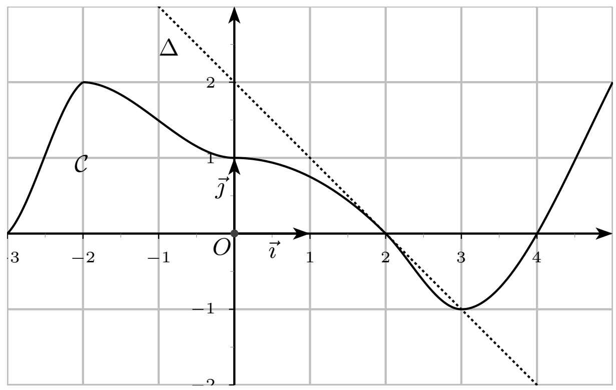
Lecture graphique

$\mathcal{C}$ représente $f : [-3; 5] \to \mathbb{R}$, Δ est tangente à $\mathcal{C}$ en $(2; 0)$.

Calculer $f'(2)$.

Résoudre $f'(x) = 0$.

Résoudre $f'(x) \leqslant 0$.



Approximation numérique

Lorsque h est voisin de 0, la tangente à une courbe est presque confondu avec cette courbe : si f est dérivable en x, on peut écrire pour h proche de 0 : $f(x + h) \approx f(x) + hf'(x)$.

Exemple. Soit h définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $h(x) = \frac{1}{x+1}$. Calculer $h'(1)$ et en déduire l'approximation de $\frac{1}{1+h} \approx 1 - h$. (cela justifie la démarche de SES qui consiste à diviser par 1,02 au lieu de multiplier par 0,98 pour calculer une diminution de 2%. Cette démarche est FAUSSE en revanche pour des pourcentages plus importants !).

---

1. c'est-à-dire : on n'a pas $f'(x) = 0$ sur un intervalle ouvert contenu dans $[a, b]$

5. Formulaire

Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Domaine de validité	Condition
k	0	$\mathbb{R}$	$k \in \mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$	
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$	$a, b \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R} : (n \geqslant 0);\ \mathbb{R} - \{0\} : (n < 0)$	$n \in \mathbb{Z} - \{0\}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$	
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$	

Opérations sur les dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel. Alors,

Fonction f	Fonction dérivée f'	Domaine de validité
$u+v$	$u'+v'$	I
uv	$u'v+v'u$	I
ku	ku'	
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$	tout $x \in I$ tel que
$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$	$v(x) \neq 0$

Fonctions composées

Les fonctions u et v sont définies et dérivables sur les intervalles respectifs I et J.

f	f'	Domaine de validité	Condition
$v \circ u$	$= u' \times v' \circ u$	$u(x) \in J$ pour tout $x \in I$	
u^n	$nu' \times u^{n-1}$	I	$n \in \mathbb{Z} - \{0\}$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$	x tels que $u(x) \neq 0$	
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	x tels que $u(x) > 0$	
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$	x tels que $u(x) > 0$	
e^u	$u' \times e^u$	I	