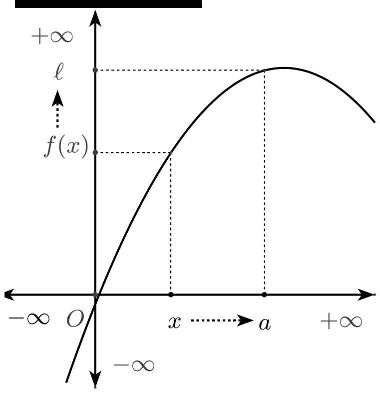
Chapitre 3 : Limites de fonctions -28-09-11-
Terminale ES 2, 2011-2012, Y. Angeli

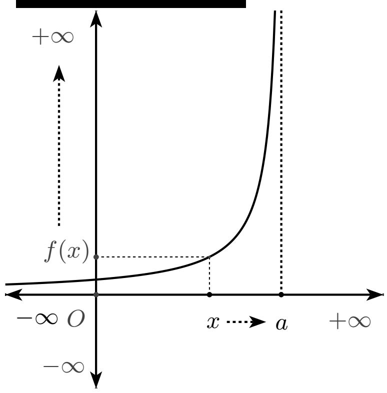
1. Notion de limite : les différentes situations.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Dans ces illustrations, a et ℓ sont des réels.

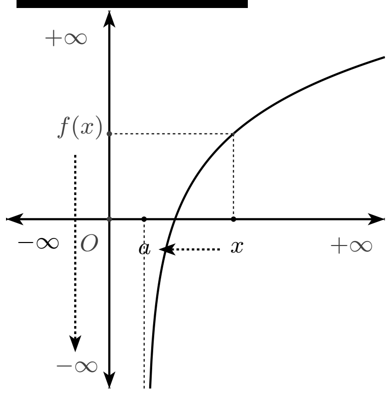
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$



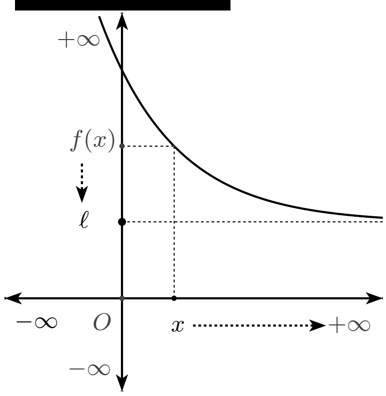
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$



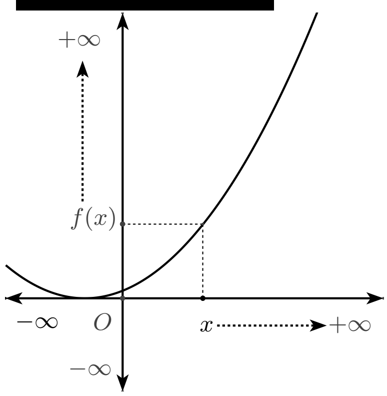
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$



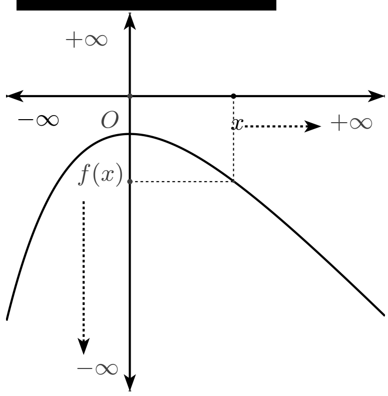
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$



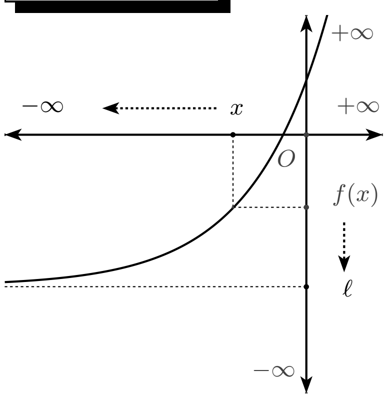
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



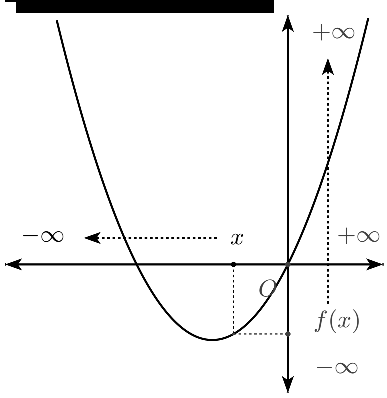
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



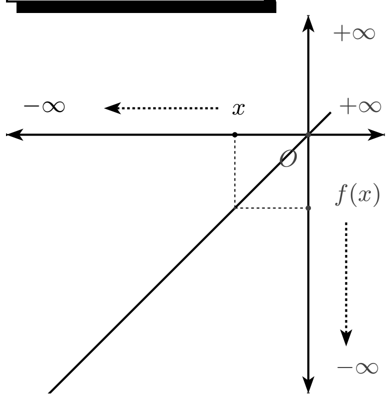
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



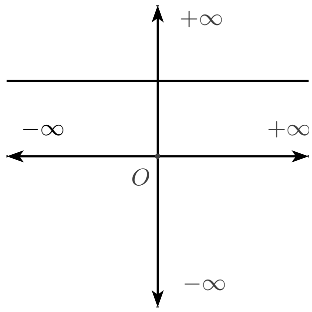
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



La notation $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ se lit : la *limite* de $f(x)$ lorsque x tend vers a est ℓ. Les symboles ℓ et a peuvent être des nombres réels ou *moins l'infini* $(-\infty)$ ou *plus l'infini* $(+\infty)$.

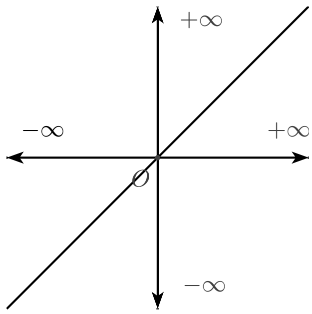
2. Les fonctions usuelles : rappels et limites

Fonction constante $x \mapsto c$ (où $c \in \mathbb{R}$, fixé)



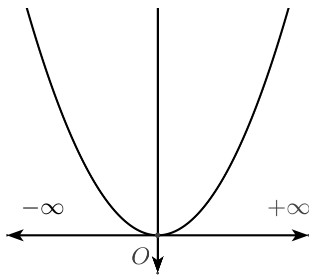
Définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Variations : constante !
Dérivée : $x \mapsto 0$.
Limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} c = c \quad \lim\limits_{x \to +\infty} c = c \quad \lim\limits_{x \to x_0} c = c$

Fonction identité $x \mapsto x$



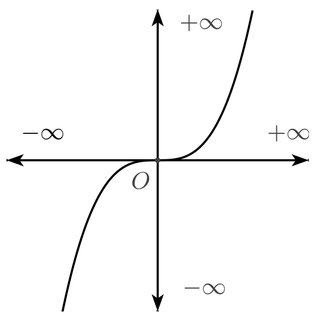
Définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Variations : strictement croissante sur $\mathbb{R}$
Dérivée : $x \mapsto 1$.
Limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \quad \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \quad \lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$

Fonction carré $x \mapsto x^2$



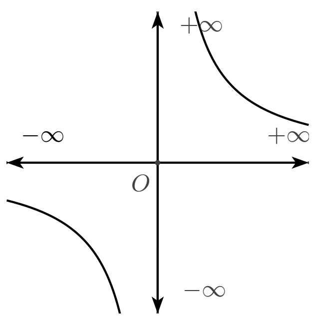
Définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Variations : $\star$ strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$
$\star$ strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
Dérivée : $x \mapsto 2x$.
Limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \quad \lim\limits_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$

Fonction cube $x \mapsto x^3$



Définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Variations : strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Dérivée : $x \mapsto 3x^2$.
Limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \quad \lim\limits_{x \to x_0} x^3 = x_0^3$

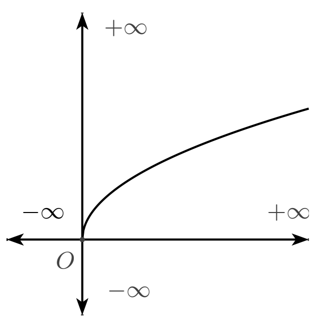
Fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$



Définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$.
Variations : $\star$ strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.
$\star$ strictement décroissante sur $]0 : +\infty[$.
Dérivée : $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.
Limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \quad \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x_0}$

$\lim\limits_{x \to 0, x<0} \dfrac{1}{x} = -\infty \quad \lim\limits_{x \to 0, x>0} \dfrac{1}{x} = +\infty.$

Fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$



Définie, continue sur $[0; +\infty[$ et dérivable sur $]0; +\infty[$.
Variations : strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
Dérivée : $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$

3. Somme et produits de limites

Les résultats qui suivent sont valables pour $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Somme de limites

$\lim\limits_{x\to a} u(x)$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} u(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} u(x)+v(x)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	⚠ ? ⚠

Exemple. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 - x =$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -x = \end{cases}$

Exemple. $\lim\limits_{x\to 0, x<0} \sqrt{x} + \dfrac{1}{x} =$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0, x<0} \sqrt{x} = \\ \lim\limits_{x\to 0, x<0} \dfrac{1}{x} = \end{cases}$

Remarque. La dernière colonne est une *forme indéterminée*, tout peut arriver :

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = -\infty \end{array}\right\}$ mais $\lim\limits_{x\to+\infty} \quad = \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = 7$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = -\infty \end{array}\right\}$ mais $\lim\limits_{x\to+\infty} \quad = \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = +\infty$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = -\infty \end{array}\right\}$ mais $\lim\limits_{x\to+\infty} \quad = \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = -\infty$

Produit de limites

$\lim\limits_{x\to a} u(x)$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} v(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} u(x)\times v(x)$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	⚠ ? ⚠

Exemple. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{x} - 1\right) x =$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} - 1 =$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x =$

Exemple. $\lim\limits_{x\to 0, x>0} (1+\sqrt{x}) \times \dfrac{1}{x} =$ car $ds \lim_{x\to 0, x>0} 1 + \sqrt{x} =$ et $\lim\limits_{x\to 0, x>0} \dfrac{1}{x} =$

Remarque. La dernière colonne du tableau des produits est une forme indeterminée :

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = 0 \end{array}\right\}$ mais $\lim\limits_{x\to+\infty} \quad = \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = 7$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = 0 \end{array}\right\}$ mais $\lim\limits_{x\to+\infty} \quad = \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = +\infty$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = 0 \end{array}\right\}$ mais $\lim\limits_{x\to+\infty} \quad = \lim\limits_{x\to+\infty} \quad = 0$

Remarque. Lorsque la forme indeterminée, $\left(\infty - \infty; \infty \times 0; \frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}\right)$ il faut changer l'écriture de la suite pour lever l'indetermination.

⚠ On n'écrit jamais de calcul faisant intervenir $+\infty$, $-\infty$, 0^+, 0^-,...

4. Limites de quotients

Limite de l'inverse d'une fonction

Les résultats qui suivent sont valables pour $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

$\lim\limits_{x\to a} v(x)$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0^+ $(0,\ v(x) > 0)$	0^- $(0,\ v(x) < 0)$
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{v(x)}$	$\frac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$

⚠ si la limite de $v(x)$ est nulle (deux derniers cas), il faut étudier le signe de $v(x)$ au voisinage de a pour obtenir la limite de $\frac{1}{v(x)}$.

Exemple. La limite $\lim\limits_{x\to 2, x<2} \dfrac{1}{2-x}$ dépend du signe de $2-x$ car $\lim\limits_{x\to 2} 2-x = 0$.

Or

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2-x$	$+$	0	$-$

donc si $x < 2$, on a $2 - x > 0$, d'où $\lim\limits_{x\to 2, x<2} \dfrac{1}{2-x} = +\infty$.

Exemple. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} =$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} =$

Limite de quotients

Méthode. La situation $\frac{0}{0}$ est une forme indéterminée. Pour traiter les limites de quotients $\frac{u}{v}$ lorsque la limite du numérateur u est non nulle, on remarque $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$, on utilise le tableau de l'inverse pour $\frac{1}{v}$ puis le tableau des produits pour conclure.

Exemple. Calculer $\lim\limits_{x\to 1, x>1} \dfrac{x^2 - 2x}{x - 1}$.

5. Limite de fonctions composées

Soient $a, b, \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{X\to b} v(X) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} v(u(x)) = \ell$.

Exemple. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} =$

6. Traiter les formes indéterminées

Théorème du plus haut degré

Théorème. La limite d'un polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est la même que la limite de son terme de plus haut degré. De même, la limite du quotient de deux polynômes en $+\infty$ ou $-\infty$ est la même que celle du quotient de leurs termes de plus haut degré.

Preuve. Dans le cas d'un polynôme en $+\infty$: soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ un polynôme avec $a_n \neq 0$. Alors pour tout $x \neq 0$, on a :
$P(x) = a_n x^n \times \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + ... + \frac{a_1}{a_n}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right)$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = ... = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ donc la limite du facteur entre paranthèses est 1.
Par produit on a bien : $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n$. $\square$

Exemple. $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^3 + 3x^4 - 5x + 4 =$ ....

Exemple. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3-x}{2x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$ par théorème.

Exemple. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x+1}{x^2+x+1}$ ....

⚠ Le théorème du plus haut degré ne s'applique que pour les limites en $+\infty$ ou $-\infty$, et que pour les polynômes ou leurs quotients.

⚠ L'utilisation du théorème pour les quotients de deux polynômes se fait en trois temps :
1. Application du théorème 2. Simplification 3. Conclusion.

Forme indéterminée $\frac{0}{0}$

Pour les limites qui présentent une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$, essayer de simplifier l'écriture de la fonction :

Exemple. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+2x}{x}$ ....

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} =$ ....

7. Théorème d'encadrement

Soient u, v, et f trois fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

Remarque. il existe des théorèmes analogues lorsque x tend vers $-\infty$, vers a, a^+ ou a^-. Si la limite ℓ est $+\infty$, il suffit d'avoir une minoration de f : $u(x) \leqslant f(x)$. Si la limite ℓ est $-\infty$, il suffit d'avoir une majoration de f : $f(x) \leqslant f(x)$.

Exemple. Montrer que pour tout $x > 0$, $\sqrt{x^2+1} \geqslant x$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - \dfrac{x}{2}$.

8. Interprétation géométrique des limites

Asymptote verticale

On dit que la courbe représentative de f admet la droite d'équation $x = a$ comme *asymptote verticale* si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$

Exemple. Illustration graphique : page 1, les deux dernières limites de la première ligne.
Quelle asymptote verticale admet l'hyperbole qui représente la fonction inverse ? Pourquoi ?
....

Asymptote horizontale

On dit que la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = \ell$ comme *asymptote horizontale* en $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} = f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

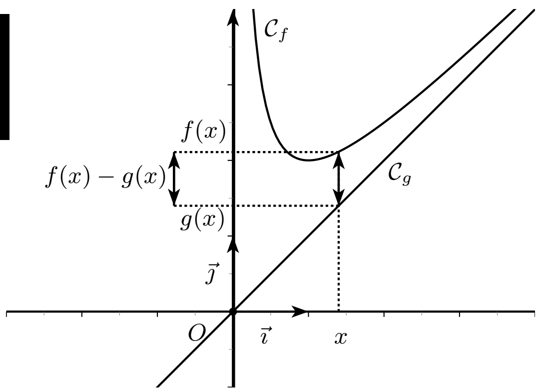
Remarque. On définit de manière analogue l'asymptote horizontale en $-\infty$.

Exemple. Illustration graphique : page 1, les deux dernières limites de la première colonne.
Quelle asymptote horizontale admet l'hyperbole qui représente la fonction inverse ? Pourquoi ?
....
....

Différence de deux courbes

Soient f et g définies sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives.

Pour tout $x \in I$, le nombre $f(x) - g(x)$ représente, au signe près, l'écart entre le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x et le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x.



Méthode. Ainsi, pour rechercher les points d'intersection de deux courbes, on résout l'équation $f(x) - g(x) = 0$. L'ensemble des solutions est l'ensemble des abscisses des points appartenant aux deux courbes. On détermine leurs ordonnées en utilisant indifféremment $y = f(x)$ ou $y = g(x)$.

Méthode. De même, pour déterminer la position relative de deux courbes, on étudie le signe de $f(x) - g(x)$ en fonction des valeurs de x, et on l'interprère ainsi :
- sur les intervalles où $f(x) - g(x) > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$.
- sur les intervalles où $f(x) - g(x) < 0$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$.

Asymptote oblique

On dit que la courbe représentative d'une fonction f admet la droite d'équation $y = ax + b$ comme asymptote oblique en $+\infty$ si l'écart entre la courbe et la droite tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$. On définit de même l'asymptote oblique en $-\infty$.

Exemple. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{3x^2+2x+1}{x}$. Montrer que la droite d'équation $y = 3x + 2$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$: ....
....
....