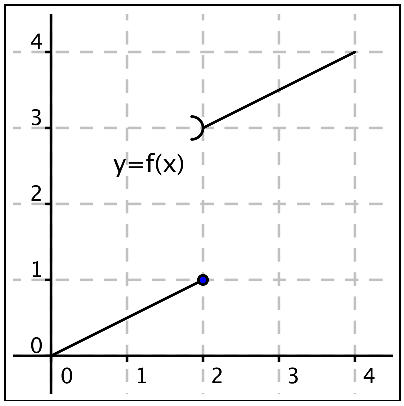
Chapitre 2 : Continuité -24-09-10-
Terminale ES 1, 2010-2011, Y. Angeli

Si f est une fonction définie sur $[0;4]$ telle que $f(0) = 0$ et $f(4) = 4$, l'équation $f(x) = 2$ admet-elle une solution ? La réponse intuitive est oui, pourvu que la courbe de la fonction ne *saute* pas. On va introduire la notion de *continuité* d'une fonction, qui est la traduction mathématique de cette absence de *saut*.



1. Notion de continuité

Une fonction f définie sur un intervalle I est *continue* en $x_0 \in I$ si lorsque x s'approche de x_0, les valeurs prisent par $f(x)$ s'approchent de $f(x_0)$. (ce que l'on note $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$: lim pour "limite").
Intuitivement, cela signifie que la courbe représentative de f ne présente pas de "saut", ou encore qu'on peut la tracer sans lever le crayon.

Exemple. La fonction identité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$: pour tout x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} x = x_0 = f(x_0)$. (c'est-à-dire, lorsque x s'approche d'un nombre x_0, $f(x) = x$ s'approche aussi de $x_0 = f(x_0)$.
Les fonctions constantes $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto c$ sont continues sur $\mathbb{R}$: pour tout x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} c = c = f(x_0)$. c'est-à-dire, lorsque x tend vers x_0, $f(x) = c$ tend vers $c = f(x_0)$.

Exemple. Soit $f : [0;4] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0,5x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 2 + 0,5x & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$
Si x tend vers 2 par la gauche, $f(x)$ tend vers $0,5 \times 2 = 1$, alors que si x s'approche de 2 par la gauche, $f(x)$ tend vers $2 + 0,5 \times 2 = 3$. Or $f(1) = 2 \neq 3$ d'après la définition de f, donc f n'est pas continue en $x = 2$.
Écriture mathématique : $f(2) = 2 \neq \lim\limits_{x\to 2, x>2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2, x>2} 0,5x + 2 = 3$.

Remarque. La somme, la différence, le produit, et le quotient de fonctions continues sont continus : c'est une conséquence des propriétés des limites et de la définition de la continuité. En particulier les fonctions usuelles (polynômes, fractions rationnelles, racines carrées, etc...) sont des fonctions continues.

2. Théorème de la valeur intermédiaire

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ avec $a < b$ réels.
Soit y_0 un nombre réel. Si les **trois** hypothèses qui suivent sont satisfaites,
$\star$ f est strictement croissante sur $[a;b]$. (ou strictement décroissante)
$\star$ $y \in]f(a), f(b)[$ (c'est-à-dire $f(a) < y_0 < f(b)$ ou $f(b) < y_0 < f(a)$)
$\star$ f est continue sur $[a,b]$
alors l'équation $f(x) = y_0$ admet une solution unique sur l'intervalle $]a,b[$.

⚠ Avant de citer le théorème, vérifier les 3 hypothèses ! Attention, la fonction doit être continue sur l'intervalle FERMÉ $[a,b]$.
⚠ Le théorème n'a pas de réciproque ! Pour montrer qu'une équation n'admet pas de solution sur un intervalle, il faut utiliser ses variations.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3 - x^2 + x + 2$.
On va montrer que $f(x) = 4$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$. On commence par étudier l'intervalle $[0;2]$:
$\star$ On calcule la dérivée de f : pour tout x, $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$. C'est un trinôme de discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 1 = -8 < 0$. D'où $f'(x) > 0$ pour tout x (le trinôme est du signe de 3). Donc f est *strictement croissante* sur $\mathbb{R}$.
$\star$ On a $f(0) = 2$ et $f(2) = 8$. Donc $2 < 4 < 8$ et $4 \in]f(0); f(2)[=]2; 8[$
$\star$ f est un polynôme donc c'est une fonction continue sur $[0;2]$
Par le théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $f(x) = 4$ admet une solution unique $x_0 \in]0;2[$.

On s'intéresse ensuite aux intervalles $]-\infty;0]$ et $[2;+\infty[$

- Comme f est strictement croissante, si $x \geq 2$, $f(x) \geq f(2) = 8$ donc l'équation $f(x) = 4$ n'admet aucune solution sur $[2,+\infty[$.
- Comme f est strictement croissante, si $x \leq 0$, $f(x) \leq f(0) = 2$ donc l'équation $f(x) = 4$ n'admet aucune solution sur $]-\infty, 0]$.
- En conclusion, l'équation $f(x) = 4$ admet une solution unique x_0 sur $\mathbb{R}$.
- Pour obtenir un encadrement de x_0 d'amplitude 10^{-2}, à la calculatrice : on affiche les valeurs de f sur $[0;2]$ avec un pas de $0,1$. Avec une TI :

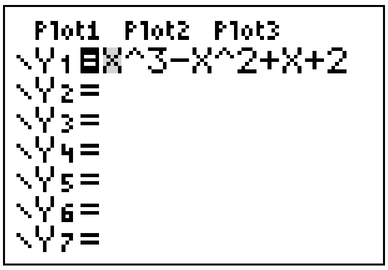


Figure 1 – [F1]

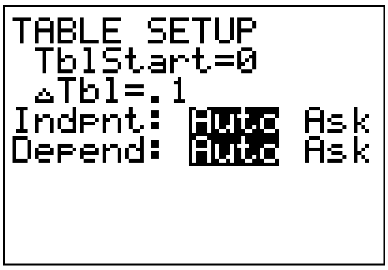


Figure 2 – [2nde][F2]

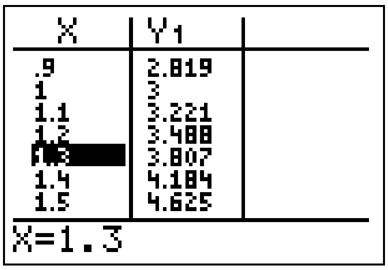


Figure 3 – [2nde][F5]

On remarque que $f(1,3) < 4 < f(1,4)$. En affichant $f(x)$ à partir de $x = 1,3$ avec un pas de 0.01 : $f(1,35) < 4 < f(1,36)$, d'où $1,35 < x_0 < 1,36$.